MATEMÁTICAS

5º E.B.A.

(Educación Básica de Personas Adultas)

Números y Operaciones

- Naturales
- Enteros
- Racionales
- Decimales

Estrategias de pensamiento matemático

Madrid julio 2002

Ángel Ricardo Puente Pérez

Matemáticas para 5º de la E.B.A.
Educación Básica de Personas Adultas

Ángel Ricardo Puente Pérez
Madrid julio 2002

ISBN: 84-699-9047-0

MATEMÁTICAS

5º E.B.A.

(Educación Básica de Personas Adultas)

Números y Operaciones

- Naturales
- Enteros
- Racionales
- Decimales

Estrategias de pensamiento matemático

Madrid julio 2002

Ángel Ricardo Puente Pérez

CONTENIDOS

MATEMÁTICAS PARA EL 5º CURSO DE LA E.B.A.

INTRODUCCIÓN

1.- MI EXPERIENCIA PROFESIONAL

Desde el año 1978, he estado trabajando en la enseñanza pública, fundamentalmente, en los cursos del Ciclo Superior (6º, 7º y 8º de la EGB) impartiendo las áreas de Matemáticas y Ciencias Naturales, entre otras.

En el año 1983 comienzo a trabajar en el Colegio Público de El Molar (Madrid). En este Centro permanezco 12 años. Durante estos años soy tutor e imparto las Matemáticas de 4 promociones completas de alumnos (empiezo en 6º y continúo con ellos en 7º y 8º para volver a la siguiente promoción de alumnos de 6º ...). Esta experiencia laboral va acompañada de trabajos de reflexión sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje en forma de seminarios, cursillos, grupos de trabajo, proyectos de innovación ...

En el año 1995 se implanta la **ESO** en este Centro y, como consecuencia, desaparecen del mismo los alumnos de edades a los que había dedicado casi toda mi vida profesional. El siguiente curso empiezo a trabajar en otro Centro con alumnos muy distintos: Es el **Centro de Educación de Personas Adultas de Colmenar Viejo** en el que continúo mi trabajo. Es decir, llevo en este Centro 7 cursos, con un paréntesis provisional de un curso, en el que trabajé en otro Centro de Educación de Adultos.

En este Centro de Colmenar Viejo he impartido, entre otras, el área de Matemáticas. A la vez, he participado en grupos de trabajo de elaboración del P.C.C. y de Materiales Curriculares que me han ayudado a la confección del trabajo que ahora presento pero que, casi en su totalidad, ya ha sido utilizado como material curricular por los alumnos de los cursos 1997/98 y 1999/00 de las aulas de Colmenar Viejo y Tres Cantos de 1º y 2º de **ESPA** (Educación Secundaria de Personas Adultas) que empieza a implantarse en mi centro el mismo curso 1997/98. El curso 1998/99 soy destinado a otro Centro de Educación de Adultos. Los materiales por mí elaborados son utilizados por el profesor que es enviado para sustituirme.

El curso 1999/00 he vuelto a retomar estos materiales realizando las modificaciones y ampliaciones que he considerado oportunas. Al finalizar el curso debo manifestar que los materiales han respondido muy bien a las necesidades formativas planteadas por los alumnos y a las mías, en todo lo referente a la elaboración de materiales y a la preparación de las clases.

A finales del curso 2001/02 retomo los materiales realizando alguna modificación para adaptarlos a la nueva organización de la Enseñanza Básica de Personas Adultas, como ahora se llama esta modalidad educativa. Los materiales que componen este trabajo se insertan en el curso 5º de la EBA dentro del Tramo III que, a su vez, está formado por dos años: 5º y 6º, al final de los cuales, el alumno obtiene el Graduado en Educación Secundaria.

2.- JUSTIFICACIÓN DE LA ELECCIÓN DE LOS CONTENIDOS.

La primera pregunta que debemos hacernos al abordar un nuevo grupo de alumnos de cualquier curso de Educación de Personas Adultas es **¿qué enseñar?**
La respuesta viene condicionada por los siguientes hechos:

- Grupo de personas adultas (no niños).
- Heterogeneidad en cuanto a edades.
- Gran heterogeneidad en conocimientos previos.
- Procedencias muy diversas: Educación de adultos, fracaso escolar, no escolarización años anteriores, ...
- Experiencia numérica previa derivada de la propia experiencia vital.
- Tiempo disponible muy limitado.
- Carácter práctico o utilitario de los estudios.
- Necesidad de homogeneizar e integrar al grupo rápidamente.
- Capacidad de mantener la atención y concentración muy superior a la de los niños.

Estos hechos me han llevado a lo largo de estos 5 años a elegir los contenidos "conceptuales" que ahora presento, es decir, **LOS NÚMEROS Y LAS OPERACIONES** para la primera mitad del año escolar.
Son contenidos ciertamente abstractos y, por tanto, se hace esta opción electiva a pesar de conocer sus limitaciones y condicionantes. Quiero decir que, estando a favor de los procesos individualizados e inductivos del aprendizaje de las Matemáticas, procesos que he intentado poner en marcha con los chicos; en el caso de los adultos, he optado por los procesos casi contrarios. El porqué de esta opción viene dado por las características de la mente adulta en general y de los grupos de Educación de Adultos en particular. Características que acabo de enumerar sucintamente.

Esta elección lleva a realizar un trabajo teórico desconectado, aparentemente, de las situaciones problemáticas de la vida real.
A pesar de lo dicho, soy partidario de no olvidar que los números, las operaciones, la matemática, ... surge de la vida, de la experiencia práctica concreta y no al revés. Lo que diferencia determinadas prácticas didácticas bastante extendidas en colegios e institutos, que trabajan las matemáticas desde una filosofía deductiva, no inductiva.

A título de ilustración de lo que quiero decir: Durante el curso 90/91 participé en un proyecto financiado por el M.E.C. y la Comunidad de Madrid de elaboración y puesta en práctica de materiales curriculares conjuntamente con el profesor de Matemáticas del C. P. de Guadalix de la Sierra para todo un año escolar y para los cursos de 6º y 7º de EGB. Los principios metodológicos se basaban en:

- Procesos individualizados de inducción: De lo concreto a lo abstracto.
- Aprendizaje por descubrimiento.
- Profesor como guía de estos procesos individualizados.

Que, como se observa fácilmente, son bastante lejanos a la opción que se hace para el aprendizaje en el 5º de la EBA, al menos en estas 5 unidades en las que se trabaja los números y las operaciones.

Como complemento a esta elección de contenidos he incluido **5 actividades de estrategia**. Estas actividades están encaminadas al desarrollo de las capacidades individuales de pensamiento. Se quiere motivar al alumno (primero al profesor), con un reto intelectual que le lleve a procesos de razonamiento individualizados y diferenciados de los demás alumnos de la clase.

Este tipo de actividades son complejas en su metodología: Muchos alumnos (también profesores), se sienten desconcertados y, es posible, que si no tenemos una especial sensibilidad, provoquen el efecto contrario al deseado: El bloqueo y el rechazo. Es por ello que el profesor deberá extremar el cuidado en el cómo, cuándo, de qué manera presenta estas actividades y, sobre todo, ser consciente de que van producirse tantas respuestas individualizadas como alumnos hay en la clase. Por otro lado se trata precisamente de esto. Probablemente muchas respuestas nos sorprenderán y también determinados bloqueos exagerados. El profesor debe ser muy respetuoso con todo el alumnado, especialmente con aquellos que se bloquean y rechazan estas actividades (verdaderas generadoras de procesos de pensamiento matemático), para no frustrar al alumno que, como no es obligatorio, igual abandona definitivamente el aula de adultos.

3.- OBJETIVOS

- Conseguir que los alumnos desarrollen una actitud positiva hacia los números y los conocimientos de naturaleza numérica.
- Conseguir un aceptable dominio en el uso de los diferentes tipos de números, sus operaciones, así como ser consciente de la aproximación como una característica operacional y de medida que depende de la situación concreta.
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

4.- CONTENIDOS CONCEPTUALES

- Significado y uso de los números naturales, enteros, fraccionarios y decimales.
- Significado y uso de la suma, resta, multiplicación y división, en distintos contextos, con números naturales, enteros, decimales y fraccionarios.
- Aproximación de un número por otro más sencillo.
- Divisibilidad: Múltiplo, divisor, múltiplos comunes, divisores comunes, máximo común divisor, mínimo común múltiplo.

- Significado y uso de las potencias de exponente entero. Raíz cuadrada y de otro exponente natural (introducción).

5.- CONTENIDOS PROCEDIMENTALES

- Interpretación y utilización de los números en diferentes contextos eligiendo la notación más adecuada para cada caso.
- Identificación de los números enteros como puntos de la recta numérica.
- Empleo de métodos personales para estimar cantidades y realizar cálculos mentales.
- Utilización de las operaciones de suma resta, multiplicación y división con números enteros, decimales y fracciones sencillas.
- Cálculo de múltiplos y divisores de números.
- Utilización de diferentes procedimientos para efectuar cálculos de la manera más sencilla.
- Aproximación por defecto y por exceso de los números en la resolución de operaciones.
- Utilización de métodos de análisis-síntesis para resolver problemas.
- Utilización de la calculadora para realizar cálculos numéricos y decidir sobre su uso.

6.- CONTENIDOS ACTITUDINALES

- Actitud positiva hacia los números y los conocimientos de naturaleza numérica y conciencia de su utilidad para expresar distintas situaciones.
- Incorporación del lenguaje numérico, del cálculo y de la estimación a la forma de proceder habitual.
- Reconocimiento y valoración crítica de la utilidad de la calculadora para la realización de cálculos e investigaciones numéricas.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar cálculos y estimaciones.
- Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas y cálculos.
- Predisposición positiva a planificar el desarrollo de un trabajo esencialmente ordenado.
- Curiosidad y respeto hacia las ideas y soluciones aportadas por otros.
- Disposición e iniciativa personal para organizar y participar solidariamente en tareas de equipo.

7.- UNIDADES

- Unidad 1: **Los Números Naturales. Operaciones.**
- Unidad 2: **Múltiplos y Divisores en N**
- Unidad 3: **Los Números Enteros**
- Unidad 4: **Los Números Racionales.**
- Unidad 5: **De los Números Racionales a los Decimales**
- **5 actividades de estrategia.**

8.- TEMPORALIZACIÓN

Estas unidades están pensadas para la primera mitad del curso (de octubre a finales de enero), que cuenta, aproximadamente, con 14 semanas.
Por la experiencia que ya tengo, el tiempo viene un poco justo, es decir, es posible que la última unidad ocupe un poco del mes de febrero, si queremos desarrollar los temas en toda su extensión. Aunque, lógicamente, todo depende de cada uno de los grupos concretos, sus capacidades, niveles iniciales, ...

Prácticamente el primer cuatrimestre se puede dividir en 14 semanas.
Cada semana cuenta con 5 periodos lectivos de ¾ de hora cada uno. Lo que completa un total de 70 periodos lectivos (52 ½ horas) para todo el cuatrimestre. De acuerdo con la duración y dificultad de cada unidad se puede distribuir el tiempo de la siguiente forma.
Las 5 actividades de estrategia, con sus correspondientes actividades de desarrollo y explotación pueden programarse una por cada unidad.

Octubre				Noviembre				Diciembre			Enero		
1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**	**9ª**	**10ª**	**11ª**	**12ª**	**13ª**	**14ª**
Unidad 1		**Unidad 2**			**Unidad 3**				**Unidad 4**			**Unidad 5**	
Actividad nº 1		Actividad nº 2			Actividad nº 3				Actividad nº 4			Actividad nº 5	

9.- ORIENTACIONES METODOLÓGICAS.

Antes de organizar los grupos de alumnos en un Centro de Educación de Personas Adultas, hay que pasarles lo que se denomina la **V.I.A.** (Valoración Inicial del Alumno). Con el resultado de esta prueba y valorando la edad, la trayectoria escolar y los intereses del alumno, se le coloca en uno u otro grupo.

Al comienzo de cada unidad se pasa la **Prueba de Conocimientos Previos**. Esta prueba tiene como objetivos:

- Valorar los conocimientos individuales de cada uno de los alumnos sobre ese tema concreto.
- Despertar dudas sobre alguno de los aspectos que se va a ver en la unidad.
- Motivar las ganas de resolver las dudas y confirmar (o no), alguna de las respuestas que los alumnos han dado a alguna de las preguntas.

Cada uno de estos tests iniciales se articula en 10 preguntas que han sido elegidas procurando que respondiesen a aspectos esenciales de la unidad con implicaciones prácticas o de la vida cotidiana.

Esta prueba, una vez realizada, se recoge por el profesor, que se la debe leer de forma inmediata pero que no la corrige para entregarla a los alumnos hasta que no se llega al final de la unidad. De esta manera mantenemos la curiosidad sobre determinadas dudas que le han podido surgir al alumno.

Una vez realizada la prueba ya se comienza a ver la **Unidad.**
El método para su desarrollo es el típico de lectura, interpretación-explicación y **ejercicios**.
No se han incluido muchas actividades a lo largo de las unidades. Se deja al profesor su diseño. Las actividades concretas deben ajustarse al grupo de alumnos, sus capacidades, sus intereses y motivaciones, la actualidad, ...
Al finalizar la unidad se entrega la **Prueba de Conocimientos Previos** bien corregida (pero sin valoración numérica o de otro tipo) o bien, esto es lo que yo hacía, le entregaba, fotocopiada por la parte de atrás la solución. De todas formas, si ha ido bien, el alumno ahora podría él solo, corregir sus propios posibles errores. Lo que, lógicamente, sería más interesante.
Con esta actividad el alumno es consciente de los avances que ha realizado desde que comenzó la unidad hasta ese momento.

Posteriormente se realiza la **Prueba de Evaluación**.

10.- EVALUACIÓN.

Esta prueba medirá la consecución o no de los objetivos propuestos a principio de la unidad. Este control se evalúa ya con todos los rigores de un examen pero teniendo sensibilidad, especialmente a principios de curso, con las características individuales de cada alumno, procurando eliminar la competitividad entre ellos, así como creando un ambiente de colaboración y ayuda mutua.
En la valoración de los resultados de esta Prueba de Evaluación se tendrá en cuenta:

- El éxito obtenido.
- El punto de partida del que se salía.
- Las capacidades individuales del alumno concreto.

Este tipo de actividades o "exámenes" generan una gran tensión entre el alumnado (o determinados sectores de alumnos), es por ello que en la primera unidad no propongo esta prueba. Las demás unidades sí la tienen.
Es de señalar que el grupo de alumnos de adultos, que se forma casi en su totalidad con personas nuevas cada año, cambia sustancialmente desde principio de curso a, más o menos, diciembre. En estos primeros meses el grupo se consolida, pierde miedos, se va habituando a la forma y métodos escolares, ... Por citar otro ejemplo significativo: El pavor a salir a la pizarra y estar delante de la mirada de los demás compañeros. Este miedo o pavor, y otros muchos, no se produce en los alumnos que provienen del fracaso escolar.

11.- OTRAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Algunas unidades tienen algún **complemento** que puede ser trabajado o no, en función de los intereses del grupo. De todas formas hay que observar que los contenidos mínimos son muy extensos y no va a sobrar demasiado tiempo.

En la primera unidad, por ejemplo, se ha incorporado **el algoritmo para la resolución de una raíz cuadrada**. A mí personalmente me parece irrelevante que el alumno sea capaz o no de resolver una raíz cuadrada empleando este procedimiento clásico. En cambio, insistentemente cada nuevo grupo y año solicita su revisión. Por eso lo he incluido. De todas formas, después del esfuerzo que les cuesta, lo olvidarán al cabo de poco tiempo. A mi juicio es mucho más interesante el proceso de **aproximaciones sucesivas**: He incluido una actividad con un desarrollo didáctico de este procedimiento. Este proceso no se olvida y, aunque lento, es eficaz. O bien, la utilización de la calculadora. Objetivo que pretendo conseguir desde el primer día de clase y que es difícil con determinados alumnos.
Las **Actividades de Estrategia** deben trabajarse con las indicaciones que ya se han dado. Insistir en que son actividades sumamente importantes, que el profesor debe dejar a los alumnos el placer del descubrimiento de las soluciones y que son de carácter absolutamente abierto. <u>Nos interesa provocar procesos individualizados de búsqueda de soluciones no tanto como el encuentro mismo de la solución</u>.

<u>12.- BIBLIOGRAFÍA.</u>

- "Documentación Básica sobre la implantación de la Educación Secundaria para Personas Adultas" M.E.C. 1995.
- "De 12 a 16 un proyecto de currículum de Matemáticas" Grupo Cero Mestral Libros. Valencia 1987.
- "Pensar matemáticamente" John Mason y otros. M.E.C.- Labor. Barcelona 1989.
- "Cajón de sastre matemático" y otros libros de Mariano Mataix. Editorial Marcombo. Barcelona 1981, 1986 y 1988.
- "Investigando las Matemáticas" Robert Fisher y Alan Vince. Libros 1 a 4. Akal. Madrid 1990.

Unidad 1

Los Números Naturales. Operaciones.

Alumno/a:____ Fecha:_______

UNIDAD 1 **CONTROL DE CONOCIMIENTOS PREVIOS**

1.- Si en el **Lenguaje** se trabaja con **letras**, en el área de **Matemáticas** se trabaja con ...

2.- La Puerta de Alcalá fue mandada construir por el rey **Carlos III** en el año **MDCCLXXVIII** ¿Sabes "traducir" el "apellido" del rey Carlos y el año en que la puerta fue construida?

3.- ¿Qué error, muy frecuente en los medios de comunicación, contiene la frase: "... ha ganado la bonita cifra de 1 250 000 ptas."?

4.- Los relojes sin saetas, es decir, aquellos que indican la hora por medio de cifras, ¿sabes qué nombre reciben?, ¿por qué?

5.- Imagínate que sólo sabes contar hasta diez ¿Serías capaz de contar el número de cruces que hay aquí?

+ + + + + + + + + + + +
+ + + + + + + + + + + +

6.- ¿Conoces algún número que no sea natural? Pon varios ejemplos.

7.- ¿Cuántas operaciones aritméticas conoces? Escribe su nombre.

8.- ¿Sabes resolver esta operación?

$2^3 =$

9.- ¿Y esta otra?

$\sqrt[2]{25} =$

10.- ¿Por qué 3 x 4 = 12 ?

M A T E M Á T I C A S

5ª CURSO EDUCACIÓN BÁSICA DE PERSONAS ADULTAS

U N I D A D D I D Á C T I C A 1

LOS NÚMEROS NATURALES. OPERACIONES

0.- INTRODUCCIÓN

Las Matemáticas trabajan, fundamentalmente, con **números**.

Los números representan **cantidades.**

Para "escribir" los números contamos con los símbolos numéricos o **cifras.**

Estos símbolos numéricos se escriben siguiendo determinadas reglas.
Símbolos y reglas de escritura constituyen un **Sistema de Numeración**.

Conocemos dos sistemas de numeración:

El **ROMANO** cuyas cifras son

I V X L C D M —

El **ARÁBIGO** que, en realidad, fue inventado por los hindúes aunque introducido en occidente por los árabes. Sus cifras son:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

El sistema de numeración romano apenas se emplea en Matemáticas puesto que el sistema árabe es infinitamente más eficaz.

La eficacia del sistema arábigo frente al romano se basa en:

1.- El sistema árabe inventó una cifra para la "no cantidad", es decir, el cero. El sistema romano carece de esta cifra.

2.- El sistema árabe está basado en la agrupación de diez en diez. Es un sistema decimal. La agrupación de diez en diez no es arbitraria, se fundamenta en el hecho de tener exactamente estos dedos en las manos. Dedos con los que aprendemos a contar y todavía, muchas veces, nos sacan de "algún apuro".

1.- SISTEMA DE NUMERACIÓN ÁRABE

Como ya se ha dicho, las cifras (dígitos o guarismos) son diez y constituyen las primeras cantidades. *(Compararlo con el sistema romano. Las cifras romanas no constituyen las primeras cantidades ordenadas).*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Para contar "uno más" ya no tenemos cifras. Entonces hacemos un paquete:

X	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**

Ahora contamos los objetos sueltos, por un lado: Cero: 0
Y los paquetes por otro: Uno: 1

Y colocamos la segunda cifra (la de los paquetes) a la izquierda de los objetos que nos han quedado sin agrupar: **10**

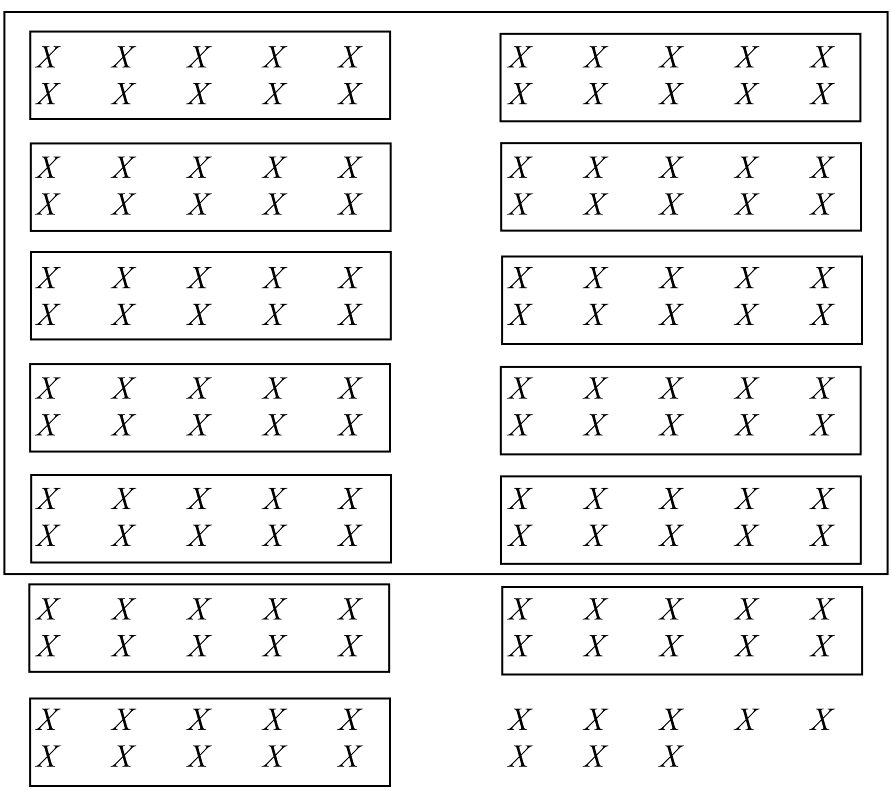
	X
1	0

Así haremos sucesivamente.

Sería conveniente hacer ejercicios para comprobar que se entiende perfectamente el mecanismo de la formación de números de dos cifras.

¿Qué ocurre cuando el número de paquetes supera la cantidad de nueve?

Entonces los paquetes serán agrupados de diez en diez en "paquetes de paquetes".
Ahora la cantidad será un número de tres cifras: A la derecha escribiremos la cifra correspondiente a los objetos que han quedado sin agrupar. A su izquierda la cifra de los paquetes que han quedado sin agrupar y, a la izquierda de ella, la cifra correspondiente a los "paquetes de paquetes" que hubiera.
Ejemplo:



Número de objetos sueltos: *8*

Número de paquetes sueltos: *3*

Número de paquetes de paquetes: *1*

		X
1	3	8

Y así sucesivamente.

Así, podríamos contar cualquier cantidad por grande que fuese, conociendo únicamente las cantidades hasta diez.

Decimos que este sistema de numeración es **<u>posicional</u>**. Es decir, una cifra tiene un valor u otro dependiendo de la posición que ocupe en el número. *(Comparar con el sistema de numeración romano).*

La cifra situada a la derecha nos indica el número de objetos que ha quedado sin agrupar o **<u>Unidades.</u>**

A la izquierda los paquetes de diez que han quedado sueltos: **<u>Decenas.</u>**

A su izquierda los paquetes de diez paquetes (10 x 10 = 100): **<u>Centenas.</u>**

A su izquierda los paquetes de diez paquetes de diez paquetes (10 x 10 x 10 = 1.000): **<u>Millares</u> o <u>unidades de millar.</u>**

Nombre de las distintas posiciones:

Unidad
Decena
Centena

Unidad de millar
Decena de millar
Centena de millar

Unidad de millón
Decena de millón
Centena de millón

Unidad de millar de millón
Decena de millar de millón
Centena de millar de millón

Unidad de billón (millón de millones)
Decena de billón
...

Actualmente las cantidades muy grandes no se suelen expresar en el sistema tradicional. Esto hace innecesario aprender más allá del billón. El sistema usado para las cantidades grandes es la utilización de potencias.
Por ejemplo, el número de átomos contenidos en un mol de un elemento químico es de, aproximadamente:

$6 \cdot 10^{23}$

Si tuviéramos que escribir este número en el sistema clásico sería:

$600.000_3 000.000_2 000.000_1 000.000$

Y su lectura sería: Seiscientos mil trillones.

Un trillón es un millón de billones.

2.- NUMERACIÓN EN OTRAS BASES

Sin pretender hacer un trabajo profundo, vamos a aproximarnos a la idea de numeración en otras bases distintas de la base diez.

2.1.- BASE CINCO: Supongamos que el ser humano hubiese contado con los dedos de una sola mano o hubiéramos nacido con una única extremidad superior. ¿Qué hubiera ocurrido con el sistema de numeración? Pues que *uno más que cuatro* ya formaría un paquete y, por tanto, una unidad de orden superior.
En otras palabras *uno más que cuatro* sería **10.**

Veamos:

0	
1	X
2	X X
3	X X X
4	X X X X
10	$\boxed{\text{X X X X X}}$

11	X X X X X	X				
12	X X X X X	X X				
13	X X X X X	X X X				
14	X X X X X	X X X X				
20	X X X X X	X X X X X				
21	X X X X X	X X X X X	X			
22	X X X X X	X X X X X	X X			
23	X X X X X	X X X X X	X X X			
24	X X X X X	X X X X X	X X X X			
30	X X X X X	X X X X X	X X X X X			
31	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X		
32	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X		
33	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X		
34	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X X		
40	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X X X		
41	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X	
42	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X	
43	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X	
44	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X X	
100	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X X X	X X X X X	

...

Con los números en base cinco se pueden realizar exactamente las mismas operaciones que en la base decimal.
Y así podríamos establecer otras bases de numeración.

2.2.-BASE BINARIA: Es aquella que dispone únicamente de dos cifras el 0 y el 1, porque *uno más que uno* ya forma un paquete.
Los primeros números serían:

Base decimal	Base binaria
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
...	...

Esta base es muy importante en el desarrollo de las máquinas de operar. Las calculadoras trabajan con estas dos cifras: El 0 corresponde al circuito cerrado (pasa corriente) y el 1 al circuito abierto (no pasa corriente). Nosotros le suministramos datos numéricos en base diez. La máquina traduce los datos a base dos, realiza los cálculos en esa base y, después, vuelve a traducir el resultado a base decimal.

3.- LOS NÚMEROS NATURALES

Los primeros números que aparecen son los que "sirven para contar". Se denominan Naturales y se representan con la letra **N**
Forman un conjunto (grupo de objetos o elementos) y se representan así:

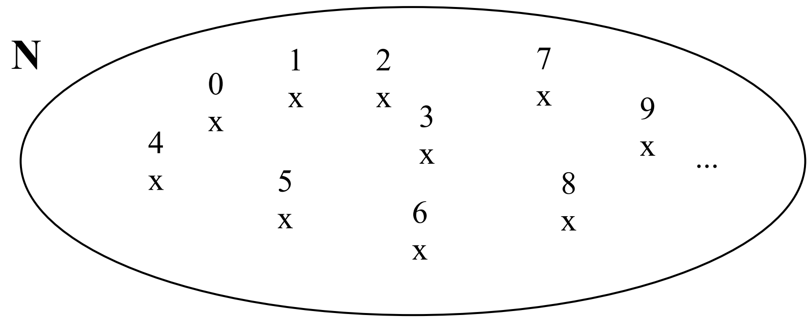
$$N = \{ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots \}$$

Los puntos suspensivos indican que los números naturales "no se acaban nunca", que no existe el número natural mayor que todos los demás. Que dado un número natural por muy grande que sea siempre encontramos otro mayor.

También se suelen representar en la denominada **semirrecta de los números naturales.**
Se dibuja una semirrecta (un punto es el origen), se elige una medida arbitraria que se lleva a la derecha infinitamente:

```
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--
0        1        2        3        4        5        6        7        8        9        10       11
```

A veces, se representan en los denominados **diagramas de Venn:**



4.- OPERACIONES ARITMÉTICAS

Operar dos números es siempre encontrar un tercero.

Las operaciones aritméticas básicas son:

4.1.- SUMAR

Es unir dos cantidades para formar una tercera.

$3 + 4 = 7$ *Tres más cuatro es igual a siete.*

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ **a** y **b** son los sumandos
c es el resultado de la suma

Al sumar dos números naturales cualesquiera siempre se obtiene otro número natural.

La suma es **conmutativa.** Es decir, da lo mismo sumar un primer número con un segundo que el segundo sumando con el primero. Se escribe:

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}}$$

El **0** es el elemento neutro de la suma. Es decir, al sumar cualquier número natural con el cero, el resultado es ese mismo número natural.

$$\boxed{a + \mathbf{0} = a}$$

4.2.- RESTAR

Es quitar a la primera cantidad, la segunda.

$7 - 1 = 6$ *Siete menos uno es igual a seis*

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

a es el **minuendo**
b es el **sustraendo**
c es la **diferencia**

Al restar dos números naturales no siempre se obtiene otro número natural.

$$1 - 5 = ?$$

No hay ningún número natural que sea la solución de esta operación.

La resta no es conmutativa. En general ocurre:

$$\boxed{\mathbf{a} - \mathbf{b} \neq \mathbf{b} - \mathbf{a}}$$

4.3.- MULTIPLICAR

Es resolver una suma con tantos sumandos iguales al primer número como indique el segundo.

$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$ *Tres por cuatro es igual a doce*

El símbolo de la multiplicación también es un punto:

$$5 \cdot 6 = 30$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

a y **b** son los factores
c es el producto

Al multiplicar dos números naturales siempre se obtiene otro número natural.

La multiplicación es conmutativa. Se cumple que

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}$$

para cualesquiera números naturales.

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación. Es decir, al multiplicar a un número natural por 1, el resultado no varía.

$$\boxed{a \cdot \mathbf{1} = a}$$

4.4.- DIVIDIR

Dividir un número natural entre otro, es repartir el primero en tantas partes iguales como indique el segundo.

$6 \; : \; 2 \; = \; 3$ *Seis dividido entre dos es igual a tres*
Seis dividido por dos es igual a tres

$\mathbf{a} \; : \; \mathbf{b} \; = \; \mathbf{c}$ **a** es el dividendo
b es el divisor
c es el cociente

Al dividir un número natural por otro número natural, no siempre se obtiene un tercer número natural. Por ejemplo:

$9 \; : \; 2 \; = \; ?$

En este caso no decimos que no se puede resolver la división. Decimos que la división no es exacta. El resultado exacto es un número no natural (decimal o fraccionario como veremos más adelante).

De momento podemos resolver la división **por aproximación.**

Resolver una división de números naturales por aproximación es encontrar el número natural que más se aproxime al cociente exacto de esa división.

La aproximación puede ser:

Por defecto: Cuando el número natural es menor que la solución exacta.
Por exceso: Cuando el número natural es mayor que la solución exacta.

Existe un símbolo para indicar que la solución no es exacta. Es éste:

$9 \; : \; 2 \; \approx \; 4$ (Solución por defecto)

$9 \; : \; 2 \; \approx \; 5$ (Solución por exceso)

Tradicionalmente en las escuelas se ha enseñado la aproximación por defecto. Más bien, la operación no se indicaba y se dejaba así:

$$\begin{array}{l|l} 9 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array}$$

Indicando que 9 repartido en dos partes iguales es igual a cuatro y que nos sobra 1 (**resto** igual a 1).

Al trabajar la división de esta forma no se hace suficiente hincapié en que operar dos números es siempre encontrar (o intentar encontrar) un tercero. Así es muy importante indicar siempre la operación sustituyendo el signo $=$ por el signo $\approx$ cuando el resultado exacto no se haya podido encontrar por las circunstancias que sean (se desconocen los números correspondientes o bien la solución exacta no es adecuada al problema concreto).

Veamos un ejemplo en que conviene realizar una aproximación por exceso:

> El precio de una excursión en autocar es de 50 000 ptas. a pagar entre las 41 personas que han hecho este viaje. ¿Cuánto deben aportar cada uno de los viajeros?
>
> 50 000 : 41 =
>
> ```
> 50 000  | 41
> 090       1219
>   080
>    390
>     21
> ```
>
> Hacemos una aproximación por exceso:
>
> 50 000 : 41 ≈ 1 220 ptas.

Es importante observar como en este caso concreto, el resultado exacto (que trabajaremos más adelante), no es adecuado al tratarse de ptas., pues no existen monedas fraccionarias de la peseta.

> Nota: En el momento de revisar este ejercicio ya la peseta ha pasado a la historia. Se deja, de todas formas, el ejemplo por ser significativo de lo que se pretende explicar

Hay una división que no se puede hacer ni tiene solución en ningún campo numérico. Es la división de cualquier número natural entre cero. Es lo que se llama un **absurdo matemático.**

8 : 0 = No se puede hacer

Si pensamos en el significado de esta operación nos daremos cuenta del sinsentido: Repartir ocho objetos en cero partes iguales (?).

La división **no** es **conmutativa.** En general:

$$\boxed{\mathbf{a : b \neq b : a}}$$

4.5.- POTENCIACIÓN

Es la multiplicación de un número por sí mismo un determinado número de veces.

$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$	*Dos al cuadrado es cuatro*
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	*Dos al cubo es igual a ocho*
$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$	*Dos a la cuarta es igual a dieciséis*
$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	*Dos a la quinta es igual a treinta y dos*

También se puede leer:

Dos elevado a la dos	*Dos elevado al cuadrado*
Dos elevado a la tres	*Dos elevado al cubo*
Dos elevado a la cuarta	
Dos elevado a la quinta	

Etc.

$\mathbf{a^n = m}$

a es la **base**
n es el **exponente**
m es la **potencia** o **resultado**

Al realizar una potencia de números naturales siempre se obtiene un número natural.

POTENCIAS ESPECIALES

- **La potencia de exponente uno.**
  Parece claro que si
  $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$
  $4^2 = 4 \cdot 4$
  entonces sea:
  $4^1 = 4$

En general:

$$\boxed{\mathbf{a^1 = a}}$$

Observa que ya no se ajusta a la definición de potencia (ya no hay multiplicación).

- **La potencia de exponente cero.**
  Es más difícil de entender. En principio, es un absurdo matemático parecido al conocido de dividir por cero. Pero los matemáticos acordaron que esas potencias podían ser consideradas y trabajar con ellas haciendo su resultado igual a 1.

  $3^0 = 1$
  $4^0 = 1$
  $5^0 = 1$

En general:

$$\boxed{\mathbf{a^0 = 1}}$$

Si te interesa el porqué de este resultado:
Cuando se trabaja con potencias, aparece una operación que es la división de potencias de la misma base. Por ejemplo:

$2^5 : 2^2 =$

Se podría resolver por partes: $2^5 = 32$; $2^2 = 4$; ahora haríamos la división:

$2^5 : 2^2 = 32 : 4 = 8$

Pero también se puede hacer de esta otra forma simplificando los factores iguales:

$$2^5 : 2^2 = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^3 = 8$$

En general se obtiene esta fórmula:

$\mathbf{a^n : a^m = a^{(n-m)}}$

Si aplicamos esta fórmula cuando los dos exponentes son iguales se obtiene ese "absurdo matemático" que resuelto de la otra forma sale igual a 1.

$2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1$

$2^3 : 2^3 = 2^0$

Así, para que esta fórmula siga funcionando, también en este caso: $2^0 = 1$

4.6.- RADICACIÓN

Es la operación inversa de la potenciación.

$\sqrt[2]{16} = 4 \Rightarrow 4^2 = 16$

La raíz cuadrada de 16 es 4 porque 4 al cuadrado es 16

$\sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2^3 = 8$

La raíz cúbica de 8 es 2 porque 2 al cubo es 8

$\sqrt[n]{m} = a$

m es el **radicando**
n es el **índice** de la **raíz**
a es la **raíz**

La radicación es una operación complicada.
De hecho, la única que debemos aprender a resolver es la raíz cuadrada.
Aunque, en caso de apuro, podemos resolverla por aproximaciones sucesivas o ... utilizando la calculadora.
El resto de las raíces hay que resolverlas con la calculadora. De todas formas, únicamente las llamadas "calculadoras científicas" pueden resolver todo tipo de raíces.

Al realizar la raíz de un número natural, no siempre el resultado es otro número natural.

Cuando el resultado no es un número natural, se procede, como en la división, por aproximación:

$\sqrt[2]{6} \approx 2$

(aproximación por defecto)

$\sqrt[2]{6} \approx 3$

(aproximación por exceso)

5.- RELACIÓN ENTRE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

SUMA	**RESTA**
MULTIPLICACIÓN	**DIVISIÓN**
POTENCIACIÓN	**RADICACIÓN**

Cada una de las operaciones de la derecha, es la inversa de cada una de las operaciones de la izquierda:

- La resta es la operación inversa de la suma.
  "Lo que la suma hace la resta lo deshace"

  $3 + 4 = 7$ $\qquad$ $7 - 4 = 3$

- La división es la operación inversa de la multiplicación.
  "Lo que la multiplicación hace, la división lo deshace"

  $5 \cdot 6 = 30$ $\qquad$ $30 : 6 = 5$

- La raíz es la operación inversa de la potencia.

"Lo que la potencia hace, la raíz lo deshace"

$$4^3 = 64 \qquad\qquad \sqrt[3]{64} = 4$$

"En vertical" las operaciones de la izquierda se relacionan así:

- Sumar varias veces es multiplicar.
- Multiplicar varias veces es hacer una potencia.

ACTIVIDADES UNIDAD 1. LOS NÚMEROS NATURALES. OPERACIONES

1.- Utilizando la agrupación de diez en diez, cuenta el número de cruces que hay aquí:

X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X

X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X

X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X

X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X

X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X

X X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X

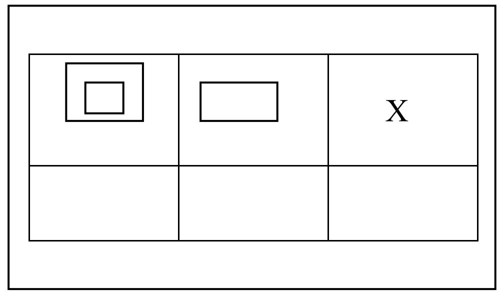
X X X X X

Resultado:

Cruces sueltas: ___

Grupos sueltos: ___

Grupos de grupos: ___



2.- Se podrían hacer muchos más ejercicios de este tipo para acabar concluyendo que:

a) ¿Podríamos contar sin conocer más allá del diez? SI NO

b) ¿Podríamos realizar las operaciones aritméticas con esta misma limitación?, es decir sin conocer las palabras "once", "doce", "trece", ... SI NO

Intercambia opiniones con tus compañeros para llegar a una respuesta única.

3.- Escribe la palabra correspondiente a cada clase:

- Objetos sueltos................ ____________________
- Grupos de diez sueltos.... ____________________
- Grupos de grupos de diez ____________________

4.- Practica la lectura de las siguientes cantidades y transforma las mismas en producto por una potencia de diez como en el ejemplo:

$3.654.000 = 3{,}654 \cdot 10^6$

$25.432 = 2{,}5432 \cdot 10^4$

$42.000.000.000 = 4{,}2 \cdot 10^{10}$

Nota: El sistema inglés de notación de los miles y decimal es justo lo contrario del utilizado, hasta ahora, por nosotros: Los puntos representan el paso a los decimales y las comas la posición de los miles, millones, ...
Este sistema se está imponiendo. (Ver calculadoras).

$300 =$

$2.500.000 =$

$14.000.000.000.000 =$

$2.564.000 =$

5.- Escribe cinco cantidades de la vida ordinaria que no se puedan expresar con números naturales:

6.- Vamos a ver si eres capaz de encontrar el número decimal correspondiente al 22 en base 3. Puedes hacerlo con otro compañero.

7.- Escribe dos restas que no tengan solución en el campo de los números naturales.

8.- Resuelve las siguientes divisiones por aproximación por defecto. Puedes emplear la calculadora:

2 345 : 76 ≈

451 675 : 54 ≈

9.- Copia las mismas divisiones y resuélvelas esta vez por aproximación por exceso.

10.- Invéntate 10 potencias de exponentes y bases variadas. Resuélvelas y después escribe la raíz correspondiente a cada una de ellas. Si tienes calculadora científica comprueba el resultado de la potencia y de la raíz.

PROCESO PARA RESOLVER UNA RAÍZ CUADRADA.

Como hemos dicho en clase lo más importante para resolver una raíz cuadrada es el concepto, saber lo que significa.
El proceso para averiguar una raíz concreta puede ser variado:

- Técnicas de aproximaciones sucesivas
- Calculadora
- El proceso que vamos a explicar a continuación:

Raíz cuadrada de un número de tres o cuatro cifras.

1.- Separamos las cifras del número en grupos de dos empezando por las unidades.

$$\sqrt[2]{7432} =$$

En este caso: 74.32
El número se ha quedado dividido en dos grupos. Esto quiere decir que la solución entera va a tener dos cifras.

2.- Ahora se empieza por la izquierda, buscando una cifra que al elevarla al cuadrado dé 74 o lo más cerca posible: En este caso es 8

$$\sqrt{\begin{array}{l|l} 74.32 & \underline{\quad 8 \quad} \end{array}}$$

3.- El 8 se eleva al cuadrado y se resta del grupo 74

$$\sqrt{\begin{array}{l|l} 74.32 & \underline{\quad 8 \quad} \\ \underline{64} & \\ 10 & \end{array}}$$

4.- Bajamos el grupo siguiente separando la última cifra

$$\sqrt{\begin{array}{l|l} 74.32 & \underline{\quad 8 \quad} \\ \underline{64} & \\ 103.2 & \end{array}}$$

5.- El número obtenido como cifra de la solución lo multiplicamos por dos. Se puede hacer de cabeza pero mejor lo escribimos así:

$$\sqrt{\begin{array}{l|l} 74.32 & \underline{\quad 8 \quad} \\ \underline{64} & 8 \cdot 2 = 16 \\ 103.2 & \end{array}}$$

6.- El número que ha quedado después de restar y bajar el siguiente grupo sin la última cifra se divide por el que acabamos de obtener al multiplicar por 2 y se escribe la cifra entera del resultado (si el resultado fuese 10 o mayor de diez escribiríamos 9 que es lo máximo que se puede poner)

$\sqrt{74.32}$	8
64	$8 \cdot 2 = 16$
103.2	$103 : 16 = 6$

7.- Se ha obtenido 6 por aproximación por defecto. Esta cifra obtenida se sube al resultado de arriba colocándola detrás. En este caso se forma el número 166

$\sqrt{74.32}$	8
64	$8 \cdot 2 = 166$
103.2	$103 : 16 = 6$

8.- Ahora se multiplica la cifra obtenida al dividir por el número de arriba:

$\sqrt{74.32}$	8
64	$8 \cdot 2 = 166$
103.2	$103 : 16 = 6$
	996

9.- Se comprueba si el número que acabamos de obtener se puede restar del número que ha quedado a la izquierda (en este caso el 1032). Como se puede restar, la cifra obtenida se sube al espacio de la solución. Si no se pudiese restar, se escribiría una unidad menos y se repetirían los pasos 7.- y 8.-

$\sqrt{74.32}$	86
64	$8 \cdot 2 = 166$
103.2	$103 : 16 = 6$
	996

10.- Finalmente hacemos la resta:

$\sqrt{74.32}$	86
64	$8 \cdot 2 = 166$
103.2	$103 : 16 = 6$
996	996
036	

11.- La solución no ha salido exacta. Podríamos obtener una cifra decimal. De momento, escribimos la solución:

$$\boxed{\sqrt[2]{7432} \approx 86}$$

El significado del resto es que si multiplicamos 86 por sí mismo obtenemos un número al que le faltan 36 unidades para ser el número propuesto.
Efectivamente:
862 = 7396
7396 + 36 = 7432
Recordar que aunque en este proceso el resultado obtenido es 86, al no ser exacto, podemos escribir también la aproximación por exceso:

$$\boxed{\sqrt[2]{7432} \approx 87}$$

Raíz cuadrada de un número de cinco o seis cifras.

En este caso la solución entera será un número de tres cifras.
1.- Empezamos igual separando, desde las unidades en grupos de dos cifras:

$\sqrt[2]{26580} =$

En este caso: 2.65.80

2.- Buscamos un número que al elevarlo al cuadrado salga el resultado de la izquierda. En este caso, como es 2, obtenemos 1

√ 2.65.80	1

3.- Elevamos al cuadrado la cifra obtenida y restamos

√ 2.65.80	1
1	
1	

4.- Bajamos el grupo siguiente separando la última cifra

√ 2.65.80	1
1	
16.5	

5.- El número obtenido como cifra de la solución lo multiplicamos por dos:

√ 2.65.80	1
1	$1 \cdot 2 = 2$
16.5	

6.- El número que ha quedado después de restar y bajar el siguiente grupo sin la última cifra se divide por el que acabamos de obtener al multiplicar por dos y se escribe la cifra entera del resultado:

$\sqrt{2.65.80}$	1
1	$1 \cdot 2 = 2$
16.5	$16 : 2 = 8$

7.- Subimos la cifra que acabamos de obtener detrás del doble anterior obteniendo 28

$\sqrt{2.65.80}$	1
1	$1 \cdot 2 = 28$
16.5	$16 : 2 = 8$

8.- Se multiplica el 8 por el 28

$\sqrt{2.65.80}$	1
1	$1 \cdot 2 = 28$
16.5	$16 : 2 = 8$
	224

9.- Comprobamos si el número obtenido se puede restar del de la izquierda.
En este caso no. Así repetimos el proceso desde el paso 6.- cambiando el resultado de la división , que era ocho, por una unidad menos, es decir, 7

$\sqrt{2.65.80}$	1
1	$1 \cdot 2 = 27$
16.5	$16 : 2 = 7$
	189

10.- Vemos si se puede restar ya.: Todavía no. Lo intentamos con una unidad menos.

$\sqrt{2.65.80}$	1
1	$1 \cdot 2 = 26$
16.5	$16 : 2 = 6$
	156

11.- Ahora ya se puede restar. Entonces subimos el 6 a la solución

$\sqrt{2.65.80}$	16
1	$1 \cdot 2 = 26$
16.5	$16 : 2 = 6$
	156

12.- Restamos:

2.65.80	16
1	1 · 2 = 26
16.5	16 : 2 = 6
156	156
09	

13.- Bajamos el siguiente grupo separando la última cifra:

2.65.80	16
1	1 · 2 = 26
16.5	16 : 2 = 6
156	156
098.0	

14.- Lanzamos una recta en el lado derecho indicando que iniciamos el proceso de búsqueda de una nueva cifra. Multiplicamos lo que llevamos de solución por dos.

2.65.80	16
1	1 · 2 = 26
16.5	16 : 2 = 6
156	156
098.0	16 · 2 = 32

15.- Dividimos lo que se quedó en la izquierda sin la última cifra por lo que acabamos de obtener

2.65.80	16
1	1 · 2 = 26
16.5	16 : 2 = 6
156	156
098.0	16 · 2 = 32
	98 : 32 = 3

16.- Subimos la cifra obtenida al lado del doble anterior formando el 323 y multiplicamos el 3 por el 32 3

2.65.80	16
1	1 · 2 = 26
16.5	16 : 2 = 6
156	156
098.0	16 · 2 = 323
	98 : 32 = 3
	969

17.- Comprobamos si se puede restar con el número de la izquierda. Se puede. Luego la cifra 3 se sube a la solución

$\sqrt{2.65.80}$	163
1	$1 \cdot 2 = 26$
16.5	$16 : 2 = 6$
156	156
098.0	$16 \cdot 2 = 323$
	$98 : 32 = 3$
	969

18.- Se resta

$\sqrt{2.65.80}$	163
1	$1 \cdot 2 = 26$
16.5	$16 : 2 = 6$
156	156
98.0	$16 \cdot 2 = 323$
969	$98 : 32 = 3$
11	969

19.- Indicamos el resultado:

$$\boxed{\sqrt[2]{26580} \approx 163}$$

163^2=26569
2659 + 11 = 26580
Si hacemos una aproximación por exceso:

$$\boxed{\sqrt[2]{26580} \approx 164}$$

PROCESO PARA RESOLVER UNA RAÍZ CUADRADA. 2

MÉTODO DE LAS APROXIMACIONES SUCESIVAS

Para empezar resuelve e intenta memorizar los cuadrados de los primeros números naturales:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2

11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2

Haz lo mismo con los cuadrados de las primeras decenas:

10^2	20^2	30^2	40^2	50^2	60^2	70^2	80^2	90^2	100^2

¿ En qué cifra acabará?

17^2	45^2	110^2	52^2	51^2	693^2	79^2	89^2	76^2	24^2
...9	*...5*	*...0*							

Escribe tus resultados de forma ordenada...

Si el número acaba en ...	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Su cuadrado acaba en ...										

Observa las simetrías que se producen en los resultados.

Ahora, lo escribimos al revés:

<table>
<tr><td>Si un número acaba en ...</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">4</td><td>5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">9</td></tr>
<tr><td>Su raíz cuadrada acaba
o puede acabar en ...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Vamos a averiguar, por tanteo, la raíz cuadrada de un número que sabemos que es un cuadrado perfecto y, por tanto, su solución es un número natural.

Ejemplo:

$\sqrt[2]{3.136}$

1.- El resultado es un número de dos cifras pues al separar en grupos de dos cifras desde las unidades, se obtienen dos grupos: 31.36

2.- ¿Entre qué dos número se encuentra?

Entre 50 y 60 pues $50^2 = 2.500 < 3.136$

$60^2 = 3.600 > 3.136$

3.- Como sabemos que el resultado es exacto, la solución será o 54 ó 56 pues el radicando acaba en 6

4.- Elevamos al cuadrado los dos "candidatos"

$54^2 = 2.916$

$56^2 = 3.136$

5.- Ya hemos obtenido la solución:

$\boxed{\sqrt[2]{3.136} = 56}$

Otro ejemplo:

$\sqrt[2]{625}$

1.- Su solución es un número de dos cifras, pues aparecen dos grupos: 6.25

2.- Está comprendida entre 20 y 30 pues:

$20^2 = 400$

$30^2 = 900$

3.- Como acaba en 5 el único "candidato" es el 25

4.- Lo comprobamos:

$25^2 = 625$

5.- Solución:

$\boxed{\sqrt[2]{625} = 25}$

Otro ejemplo:

$\sqrt[2]{5.329}$

1.- Es un número de dos cifras: 53.29

2.- Está comprendido entre 70 y 80 pues:

$70^2 = 4.900 < 5.329$

$80^2 = 6.400 > 5.329$

3.- Como el radicando acaba en 9 los candidatos son 73 y 77

4.- Lo compruebo:

$73^2 = 5.329$

$77^2 =$ ya no me interesa

5.- Solución:

$$\boxed{\sqrt[2]{5.329} = 73}$$

Vamos a hacer un resumen del proceso.
Realiza, completando la tabla, las ocho raíces que se proponen:

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Candidatos	Solución
3.136	dos	50	60	54 y 56	**56**
625	dos	20	30	25	**25**
5.329	dos	70	80	73 y 77	**73**
6.400					
8.281					
4.096					
1.089					
2.025					
1.024					
961					
529					

Cuando la solución no es exacta hay que seguir el método de las aproximaciones sucesivas

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Nueva Aproximación	Cuadrado de la aproximación
4.758	dos	60	70	65	4.225
		65	70	67	4.489
		67	70	68	4.624
		68	70	69	4.761
		68	69		

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[2]{4.758} \approx 68 \text{ (por defecto)} \\ \sqrt[2]{4.758} \approx 69 \text{ (por exceso)} \end{array}}$$

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Nueva Aproximación	Cuadrado de la aproximación
3.160	dos	50	60	55	3.025
		55	60	57	3.249
		55	57	56	3.136
		56	57		

$$\sqrt[2]{3.160} \approx 56 \ \text{(por defecto)}$$
$$\sqrt[2]{3.160} \approx 57 \ \text{(por exceso)}$$

Empleando este procedimiento resuelve por aproximaciones sucesivas las raíces de:

1.257	4.584	7.658	700	436	333	908	670

ORIENTACIONES GENERALES

1.- INTRODUCCIÓN.

En esta primera unidad vamos a estar muy preocupados por crear un buen ambiente de grupo y por integrar a todos sus componentes.
Es por ello que los aspectos académicos de una clase tradicional deben dejar espacio para los de tipo humano y de dinámica de grupos.
El grupo es nuevo, de edades muy diversas, la procedencia de los mismos es también muy diversa, muchos de los integrantes desconocen lo que significa el ambiente "clase", ...
El profesor, sobre todo si no tiene experiencia en un aula de adultos, tiene que ser consciente de todos estos condicionantes. El índice de abandono en las aulas de educación de adultos es muy alto. Nosotros podemos reducirlo siendo sensibles a las peculiaridades individuales de los integrantes del grupo y siendo muy pacientes sobre todo las primeras semanas.
Así, en esta primera unidad, no se ha incluido una prueba individual que sirva para evaluar al alumno los conocimientos adquiridos al final de la unidad y, en cambio, se ha incorporado una serie de actividades para resolver en grupo. De esta manera, a la vez que evaluamos al alumno y al grupo, propiciamos el intercambio de información y colaboración entre los alumnos. Todas las actividades que se realicen deben hacerse sin crear ambientes de examen para, por otro lado, procurar que cada alumno manifieste sus conocimientos previos, sus dudas, lagunas, capacidades, ...

2.- PRUEBA DE CONOCIMIENTOS PREVIOS.

Dicho lo anterior, al pasarles la hoja de conocimientos previos, deberemos hacerlo explicando muy bien que no es un examen, que no va a ser valorado, ... que su única misión consiste en darnos una pista a nosotros, sobre lo que saben o no saben.
Por lo tanto no es demasiado importante que los alumnos no hablen entre sí, que no pregunten al profesor, que no "copien"... Nosotros deberemos estar atentos para extraer de esta actividad la información que nos interesa: Averiguar hasta que punto los alumnos saben o no saben acerca de los números naturales y de las operaciones básicas.
Lógicamente, en el expediente del alumno, se encuentra la **V.I.A.** (Prueba de Valoración Inicial del Alumno), que nos da pautas sobre sus conocimientos. Ésta que hacemos ahora es más concreta sobre el tema que vamos a trabajar.

3.- LOS NÚMEROS ROMANOS.

Los alumnos más mayores, probablemente, conocerán mejor el Sistema de Numeración Romano que los alumnos que provengan de fracaso escolar. Le podemos dedicar un cierto tiempo pero siendo conscientes de que lo importante no son los números romanos sino el Sistema de Numeración Decimal.

4.- SISTEMA DE NUMERACIÓN ÁRABE.

Ser consciente de que contar es agrupar de diez en diez, supone un descubrimiento para muchos de los alumnos. Este hecho es muy importante y deberemos dedicarle una especial atención.
Para reforzar la idea de agrupación, se puede trabajar alguna otra base. En el texto se propone la base cinco, también la binaria que es tan importante para la tecnología actual.

No obstante, de nuevo, lo importante es la base decimal y a ésta es a la que hay que dedicarle los esfuerzos más importantes.

5.- OPERACIONES

La idea de que operar es encontrar, a partir de dos números, un tercero, no es tan general como pudiera parecer.

El hecho de presentar las operaciones sin indicar muchas veces, y sin el uso de la notación correcta otras, es la causa de este desconocimiento.

Por lo tanto, una idea muy importante en esta unidad es la idea de la **APROXIMACIÓN**. Para ello usaremos el signo **≈** que, probablemente, será desconocido para muchos de nuestros alumnos.

Junto con la idea de la aproximación viene la idea del **por defecto** y **por exceso**. De nuevo una idea muy novedosa y que provocará ciertos recelos en alguno de los alumnos. Sin embargo, un concepto muy ligado con la vida cotidiana como pone de manifiesto la actividad que se comenta en el apartado **4.4.-** de la división (página 20).

6.- RAÍCES.

Es la operación más compleja. En primer lugar hay que dedicarle un cierto tiempo a desterrar la idea de que las raíces son las raíces cuadradas. Esta confusión en el nombre de la operación pone de manifiesto el poco uso de las raíces no cuadradas. En este momento entra el uso de la calculadora.

7.- LA CALCULADORA.

Desde el primer momento la calculadora debe entrar en el aula. Todavía hay muchos compañeros que lo cuestionan. Dicen que el alumno está aprendiendo todavía a realizar ciertas operaciones y que el uso de la calculadora va a hacer que nunca llegue a aprender.

Efectivamente, ésta es una buena objeción. La respuesta es que ¿hasta qué punto es muy importante que el alumno sepa el algoritmo concreto de esa operación?

Nosotros creemos que lo importante no es el algoritmo de la operación sino el **concepto** de la operación. Mucho más importante que saber cómo se divide por números de tres cifras, es saber cuándo hay que dividir y qué significa la división. Mucho más importante que saber el algoritmo de la raíz cuadrada ("pesadísimo" por otro lado ¿no creen?), es saber lo que significa obtener la raíz cuadrada de un número. El problema es que le dedicamos tanto esfuerzo a aprender la mecánica concreta que olvidamos el concepto de la operación. Y, como el tiempo es limitado y hay que elegir, es mucho más importante dedicar las energías a trabajar los conceptos que no los mecanismos de los algoritmos concretos. Así que la calculadora libera el tiempo necesario para poderlo dedicar a lo realmente importante.

Porque ¿quién va a hacer las divisiones correspondientes para pasar de pesetas a euros "a mano"? Para eso está la calculadora efectivamente. Así que hay que aprender a usarla desde el primer momento. Nos encontraremos con reticencias sobre todo de las personas más mayores. Esas reticencias vienen del hecho de que para ellas es un mundo muy lejano y desconocido al que no se quieren enfrentar. Los jóvenes, en cambio, usarán y abusarán de ella.

Para elegir un tipo de calculadora: Una **científica** que permite trabajar potencias y raíces no cuadradas, por ejemplo, en lo que concierne a esta unidad. Es bueno que no todas las calculadoras sean de la misma marca y tipo para poder contrastar y comparar distintos tipos y formas de trabajar.

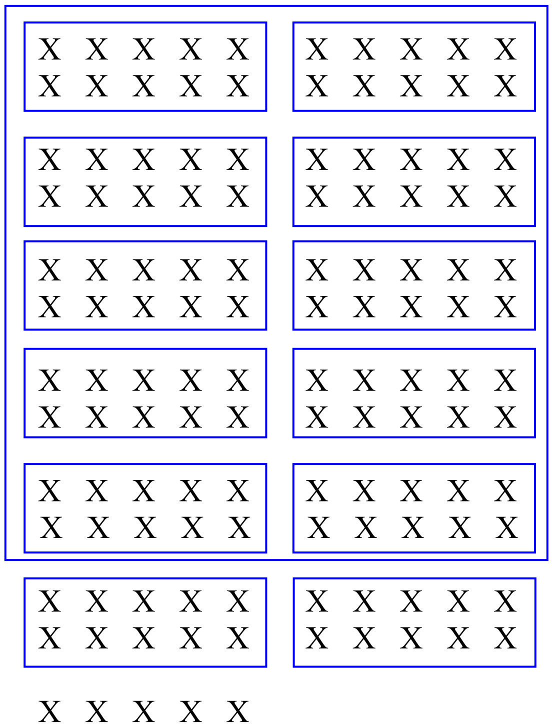
8.- RELACIÓN ENTRE LAS OPERACIONES

El cuadro que se presenta en el apartado **5.-** es un buen referente al que se vuelve varias veces. Es importante porque da una visión global de las 6 operaciones y la relación entre ellas.

SOLUCIONES

ACTIVIDADES UNIDAD 1. LOS NÚMEROS NATURALES. OPERACIONES

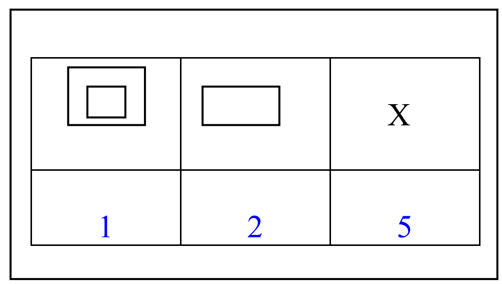
1.- Utilizando la agrupación de diez en diez, cuenta el número de cruces que hay aquí:



Resultado:

Cruces sueltas: _*5*_

Grupos sueltos: _*2*_



2.- Se podrían hacer muchos más ejercicios de este tipo para acabar concluyendo que:

a) ¿Podríamos contar sin conocer más allá del diez? SI NO

b) ¿Podríamos realizar las operaciones aritméticas con esta misma limitación?, es decir sin conocer las palabras “once”, “doce”, “trece”, ... SI NO

Intercambia opiniones con tus compañeros para llegar a una respuesta única.

3.- Escribe la palabra correspondiente a cada clase:

- Objetos sueltos................ _ *Unidades*_
- Grupos de diez sueltos.... _ *Decenas*_
- Grupos de grupos de diez _ *Centenas*_

4.- Practica la lectura de las siguientes cantidades y transforma las mismas en producto por una potencia de diez como en el ejemplo:

$3.654.000 = 3{,}654 \cdot 10^6$

$25.432 = 2{,}5432 \cdot 10^4$

$42.000.000.000 = 4{,}2 \cdot 10^{10}$

Nota: El sistema inglés de notación de los miles y decimal es justo lo contrario del utilizado, hasta ahora, por nosotros: Los puntos representan el paso a los decimales y las comas la posición de los miles, millones, ...
Este sistema se está imponiendo. (Ver calculadoras).

$300 = 3 \cdot 10^2$

$2.500.000 = 2{,}5 \cdot 10^6$

$14.000.000.000.000 = 1{,}4 \cdot 10^{13}$

$2.564.000 = 2{,}564 \cdot 10^6$

5.- Escribe cinco cantidades de la vida ordinaria que no se puedan expresar con números naturales.

La tecla del ascensor para indicar el primer sótano.
El interés al que me cobra el banco un préstamo concreto.
El porcentaje de votos que ha obtenido un candidato en unas elecciones.
El resultado exacto al resolver cuánto mide el lado de una habitación de forma cuadrada sabiendo que su superficie es de 10 m^2.
Las tartas que se ha comido Pedro sabiendo que se ha comido de la tarta partida en 8 partes iguales, una de esas partes.

6.- Vamos a ver si eres capaz de encontrar el número decimal correspondiente al 22 en base 3. Puedes hacerlo con otro compañero.

X X X		X X	= ***8*** *(En base decimal)*
X X X			

7.- Escribe dos restas que no tengan solución en el campo de los números naturales.

10 – 12 =

4 – 10 =

8.- Resuelve las siguientes divisiones por aproximación por defecto. Puedes emplear la calculadora:

2 345 : 76 ≈ 30

451 675 : 54 ≈ 8364

9.- Copia las mismas divisiones y resuélvelas esta vez por aproximación por exceso.

2 345 : 76 ≈ 31

451 675 : 54 ≈ 8365

10.- Invéntate 10 potencias de exponentes y bases variadas. Resuélvelas y después escribe la raíz correspondiente a cada una de ellas. Si tienes calculadora científica comprueba el resultado de la potencia y de la raíz.

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

$5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3.125$

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

$3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$

$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2.187$

$\sqrt[3]{64} = 4$
$\sqrt[4]{16} = 2$
$\sqrt[2]{16} = 4$
$\sqrt[5]{3125} = 5$
$\sqrt[2]{9} = 3$
$\sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[4]{81} = 3$
$\sqrt[5]{243} = 3$
$\sqrt[6]{729} = 3$
$\sqrt[7]{2187} = 3$

PROCESO PARA RESOLVER UNA RAÍZ CUADRADA. 2

SOLUCIONES

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
1	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*	*49*	*64*	*81*	*100*

11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2
121	*169*	*196*	*216*	*225*	*256*	*289*	*324*	*361*	*400*

10^2	20^2	30^2	40^2	50^2	60^2	70^2	80^2	90^2	100^2
100	*400*	*900*	*1.600*	*2.500*	*3.600*	*4.900*	*6.400*	*8.100*	*10.000*

17^2	45^2	110^2	52^2	51^2	693^2	79^2	89^2	76^2	24^2
...9	*...5*	*...0*	*...4*	*...1*	*...9*	*...1*	*...1*	*...6*	*...6*

Si el número acaba en ...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Su cuadrado acaba en ...	*0*	*1*	*4*	*9*	*6*	*5*	*6*	*9*	*4*	*1*

Si un número acaba en ...	0	1		4		5	6		9	
Su raíz cuadrada acaba o puede acabar en ...	*0*	*1*	*9*	*2*	*8*	*5*	*4*	*6*	*3*	*7*

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Candidatos	Solución
3.136	dos	50	60	54 y 56	**56**
625	dos	20	30	25	**25**
5.329	dos	70	80	73 y 77	**73**
6.400	*dos*	*80*	*80*	*80*	***80***
8.281	*dos*	*90*	*100*	*91 y 99*	***91***
4.096	*dos*	*60*	*70*	*64 y 66*	***64***
1.089	*dos*	*30*	*40*	*33 y 37*	***33***
2.025	*dos*	*40*	*50*	*45*	***45***
1.024	*dos*	*30*	*40*	*32 y 34*	***32***
961	*dos*	*30*	*40*	*31 y 39*	***31***
529	*dos*	*20*	*30*	*23 y 27*	***23***

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Nueva Aproximación	Cuadrado de la aproximación
1.257	*dos*	*30*	*40*	*35*	*1.225*
		35	*40*	*37*	*1.369*
		35	*37*	*36*	*1.296*
		35	***36***		

$$\sqrt[2]{1.257} \approx 35\,(aprox.\,por\,defecto)$$
$$\sqrt[2]{1.257} \approx 36\,(aprox.\,por\,exceso)$$

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Nueva Aproximación	Cuadrado de la aproximación
4.584	*dos*	*60*	*70*	*65*	*4.225*
		65	*70*	*67*	*4.489*
		67	*70*	*68*	*4624*
		67	***68***		

$$\sqrt[2]{4.584} \approx 67\,(aprox.\,por\,defecto)$$
$$\sqrt[2]{4.584} \approx 68\,(aprox.\,por\,exceso)$$

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Nueva Aproximación	Cuadrado de la aproximación
7.658	*dos*	*80*	*90*	*85*	*7.225*
		85	*90*	*87*	*7569*
		87	*90*	*88*	*7.744*
		87	***88***		

$$\sqrt[2]{7.658} \approx 87\,(aprox.\,por\,defecto)$$
$$\sqrt[2]{7.658} \approx 88\,(aprox.\,por\,exceso)$$

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Nueva Aproximación	Cuadrado de la aproximación
700	*dos*	*20*	*30*	*25*	*625*
		25	*30*	*27*	*729*
		25	*27*	*26*	*676*
		26	***27***		

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Nueva Aproximación	Cuadrado de la aproximación
436	*dos*	*20*	*30*	*23*	*529*
		20	*23*	*21*	*441*
		20	***21***		

$$\sqrt[2]{436} \approx 20\,(aprox.\,por\,defecto)$$
$$\sqrt[2]{436} \approx 21\,(aprox.\,por\,exceso)$$

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Nueva Aproximación	Cuadrado de la aproximación
333	*dos*	*10*	*20*	*18*	*324*
		18	*20*	*19*	*361*
		18	***19***		

$$\sqrt[2]{333} \approx 18\,(aprox.\,por\,defecto)$$
$$\sqrt[2]{333} \approx 19\,(aprox.\,por\,exceso)$$

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Nueva Aproximación	Cuadrado de la aproximación
908	*dos*	*30*	*40*	*31*	*961*
		30	***31***		

$$\sqrt[2]{908} \approx 30\,(aprox.\,por\,defecto)$$
$$\sqrt[2]{908} \approx 31\,(aprox.\,por\,exceso)$$

Radicando	Nº cifras de la raíz:	Comprendido entre		Nueva Aproximación	Cuadrado de la aproximación
670	*dos*	*20*	*30*	*25*	*625*
		25	*30*	*28*	*784*
		25	*28*	*27*	*729*
		25	*27*	*26*	*676*
		25	***26***		

$$\sqrt[2]{670} \approx 25\,(aprox.\,por\,defecto)$$
$$\sqrt[2]{670} \approx 26\,(aprox.\,por\,exceso)$$

UNIDAD 1 SOLUCIONES CONTROL CONOCIMIENTOS PREVIOS

1.- Si en el **Lenguaje** se trabaja con **letras**, en el área de **Matemáticas** se trabaja con ...

Cifras

2.- La Puerta de Alcalá fue mandada construir por el rey **Carlos III** en el año **MDCCLXXVIII** ¿Sabes "traducir" el "apellido" del rey Carlos y el año en que la puerta fue construida?

Carlos 3º. En el año 1 778

3.- ¿Qué error, muy frecuente en los medios de comunicación, contiene la frase: "... ha ganado la bonita cifra de 1 250 000 ptas."?

Confundir cifra con número.

4.- Los relojes sin saetas, es decir, aquellos que indican la hora por medio de cifras, ¿sabes qué nombre reciben?, ¿por qué?

Digitales. Porque dígito es lo mismo que cifra.

5.- Imagínate que sólo sabes contar hasta diez ¿Serías capaz de contar el número de cruces que hay aquí?

+ + + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + +	+ + + +

24

6.- ¿Conoces algún número que no sea natural? Pon varios ejemplos.

1,5 ½ *-5* π $\sqrt{-4}$

7.- ¿Cuántas operaciones aritméticas conoces? Escribe su nombre.

Suma, resta, multiplicación, división, potencia, raíz.

8.- ¿Sabes resolver esta operación?

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

9.- ¿Y ésta otra?

$\sqrt[2]{25} = 5$

10.- ¿Por qué 3 x 4 = 12 ?

Porque $3 + 3 + 3 + 3 = 12$

0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65

Unidad 2

Múltiplos y Divisores en N.

70
75
80
85
90
95

Alumno/a:____ **Fecha:**_______

UNIDAD 2 **CONTROL DE CONOCIMIENTOS PREVIOS**

1.- En el monedero llevo sólo monedas de 50 ptas. ¿Cuánto dinero llevo sabiendo que tengo más de 500 ptas pero menos de 600? ¿Cuántas monedas llevo?

2.- El autobús A sale cada 10 minutos y el autobús B cada 15. A las doce del mediodía han salido los dos autobuses a la vez. ¿A qué hora volverán a salir otra vez los dos juntos?

3.- La división de 6 entre 4 no es exacta:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

¿Sabrías encontrar los cuatro números que dividen exactamente a 6? Escríbelos en el círculo y haz la división.

$$\begin{array}{r|l} 6 & \bigcirc \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & \bigcirc \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & \bigcirc \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & \bigcirc \\ \hline \end{array}$$

4.- ¿Tienes alguna idea sobre lo que puede ser el concepto de **número primo**?

5.- ¿Sabes cuándo un número es divisible por dos?

6.- ¿Sabes qué propiedad tiene el **1** como número divisor?

7.- ¿Sabes lo que significan las siglas **M.C.D.**?

8.- ¿Y estas otras: **m.c.m.**?

9.- ¿Sabes encontrar un número par que sea divisible por 3?

10.- ¿Sabes encontrar un número que sea divisible por 2 por 3 y por 5 a la vez?

M A T E M Á T I C A S

5ª CURSO EDUCACIÓN BÁSICA DE PERSONAS ADULTAS

U N I D A D D I D Á C T I C A 2

MÚLTIPLOS Y DIVISORES EN N

1.- RELACIÓN "SER MÚLTIPLO DE ..."

En el conjunto de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots \}$$

Establecemos la siguiente relación: Un número natural **a** es múltiplo de otro número natural **b** , si encontramos un tercer número natural **c** que multiplicado por **b** nos dé el **a** .

Ejemplos:

8 es múltiplo de 2 porque $8 = 2 \cdot 4$

9 no es múltiplo de 5 porque $9 = 5 \cdot ?$
No hay ningún número natural que multiplicado por 5 dé 9.

Una vez encontrado (o no encontrado) el tercer número, éste no es relevante. Lo único importante son los dos primeros números sobre los que se establece la relación.

Se escribe:

$8 = \dot{2}$
(8 es múltiplo de 2)

$a = \dot{b}$
(a es múltiplo de b)

$9 \neq \dot{5}$
(9 no es múltiplo de 5)

$a \neq \dot{b}$
(a no es múltiplo de b)

2.- CONJUNTO DE LOS MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

Dado un número natural cualquiera, podemos buscar unos cuantos múltiplos de él.
Ejemplo:
Busquemos múltiplos del número 4:

$8 = \dot{4}$
Porque $8 = 4 \cdot 2$
El 8 es un múltiplo de 4

$12 = \dot{4}$
Porque $12 = 4 \cdot 3$
El 12 es otro múltiplo de 4

$0 = \dot{4}$
Porque $0 = 4 \cdot 0$
El 0 es otro múltiplo de 4

$4 = \dot{4}$

Porque $4 = 4 \cdot 1$

El 4 es múltiplo de sí mismo.

En realidad son múltiplos de 4 todos los resultados de su tabla de multiplicar.
Si los escribimos de forma ordenada, obtenemos el **Conjunto de los múltiplos** de ese número:

$$\dot{4} = \{\ 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ 36,\ 40,\ 44,\ \ldots\ \}$$

Finalizamos con **...** que quiere decir que los múltiplos de 4 son **infinitos**, que "no se acaban nunca", que no encontramos el múltiplo de 4 mayor que todos los demás.

Los múltiplos de 3 son:

$$\dot{3} = \{\ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30,\ 33,\ 36,\ \ldots\ \}$$

2.1.- CASOS ESPECIALES

Los múltiplos de 0 son:

$$\dot{0} = \{\ 0\ \}$$

El 0 tiene un único múltiplo que es él mismo.

Los múltiplos de 1 son:

$$\dot{1} = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots\ \}$$

Todos los números naturales son múltiplos de 1.

3.- PROPIEDADES DE LOS MÚLTIPLOS

- El 0 es múltiplo de todos los números naturales.
- Todo número es múltiplo de sí mismo.

4.- "SER DIVISOR DE ..."

Es la relación inversa de "ser múltiplo de ..."
Si **a** es múltiplo de **b** , entonces **b** es divisor de **a** .

Como 8 es múltiplo de 2 entonces 2 es divisor de 8

Como 9 no es múltiplo de 5 entonces 5 no es divisor de 9

Se escribe:

$2 \mid 8$ (Dos es divisor de ocho)

$5 \nmid 9$ (Cinco no es divisor de nueve)

Esta simbología no es tan usual como la de "ser múltiplo de ..."

Como escribir $2 \mid 8$ equivale a decir:

$8 = \dot{2}$

se prefiere esta segunda representación a la primera.

En realidad, un número es divisor de otro cuando lo divide exactamente.

4 es divisor de 8 porque	8 0	4 2
5 no es divisor de 9 porque	9 4	5 1

5.- CONJUNTO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Dado un número cualquiera, podemos intentar buscar todos los números que son divisores de él.

Ejemplo:

Busquemos todos los divisores de 12.

12	**1**	12	**2**	12	**3**	12	**4**	12	5	12	**6**
0	12	0	6	0	4	0	3	2	2	0	2

12	7	12	8	12	9	12	10	12	11	12	**12**
5	1	4	1	3	1	2	1	1	1	0	1

Así, los divisores de 12 son:

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12

Los escribimos en forma de conjunto:

$\text{Div}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Se lee: Los divisores de 12 son el 1 , el 2 , el 3 , el 4 , el 6 y el 12

En este caso no ponemos **...** porque el número de divisores es finito (tiene fin) en contra de lo que ocurría con el número de múltiplos.

5.1.- PROCEDIMIENTO PARA AVERIGUAR LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Más adelante aprenderemos otro pero, de momento, empezaremos con éste:
Consiste en buscar las parejas de números que multiplicados entre sí nos den el número inicial.

Empezamos siempre con el 1 y vamos avanzando intentando el 2 , el 3 , ...

Caso 1: Busquemos los divisores de 16.

La primera pareja de números que multiplicados dan 16 es

$1 \cdot 16$

Seguimos con el 2

$2 \cdot 8$

Continuamos con el 3

$3 \cdot ?$ (No funciona)

Seguimos con el 4

$4 \cdot 4$

Ya hemos acabado. Los escribimos ordenados:

Div(16) = { 1 , 2 , 4 , 8 , 16 }

Caso 2: Busquemos los divisores de 30

$1 \cdot 30$

$2 \cdot 15$

$3 \cdot 10$

$4 \cdot ?$ (No funciona)

$5 \cdot 6$

Ya hemos acabado. Los escribimos ordenados:

Div (30) = { 1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 10 , 15 , 30 }

Caso 3: Busquemos ahora los divisores de 14

1 · 14
2 · 7
3 · ? (No funciona)
4 · ? (No funciona)
5 · ? (No funciona)
6 · ? (No funciona)

Ya hemos acabado.

Div (14) = { 1 , 2 , 7 , 14 }

¿Cuándo se acaba?

Caso 1: <u>Cuando llegamos a una pareja formada por el mismo número.</u>

Caso 2: <u>Cuando llegamos a una pareja formada por dos números consecutivos.</u>

Caso 3: <u>Cuando llegamos a una pareja de números que no son consecutivos pero comprobamos que los números comprendidos entre ambos no funcionan.</u>

6.- PROPIEDADES DE LOS DIVISORES

- El 1 es divisor de todos los números naturales.
- Todo número es divisor de sí mismo.

7.- NÚMERO PRIMO

Se llama número primo a aquel número natural que sólo tiene dos divisores que son el 1 y él mismo.

Ejemplo: El 7

Div (7) = { 1 , 7 }

El 7 es un número primo porque sólo tiene dos divisores que son el 1 y el 7.

8.- NÚMERO COMPUESTO

Son números compuestos todos aquellos números naturales que no son primos. Es decir, aquellos números naturales que tienen más de dos divisores.

Ejemplo: El 4
Div (4) = { 1 , 2 , 4 }
El 4 es un número compuesto porque tiene más de dos divisores (tres).

Se llaman números compuestos porque todo número compuesto se puede descomponer en producto de otros dos distintos de él.

Ejemplo: $4 = 2 \cdot 2$

La palabra primo viene del latín “primero” e indica que un número primo no se puede “romper” en producto de otros dos más pequeños que él.

9.- EL 1, UN PRIMO ESPECIAL

El 1 es un primo especial pues en lugar de tener dos divisores tiene un único divisor que es el propio 1.

10.- PRIMEROS NÚMEROS PRIMOS

Los números primos son muy importantes en Matemáticas. Por eso, es fundamental conocer los primeros primos y tener una lista de ellos para consultar en un momento determinado.

Para averiguar los primeros primos comprendidos hasta el número 100, procederemos de la siguiente forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

El objetivo es eliminar de la tabla de los primeros números naturales todos los números compuestos para que se queden sin eliminar los números primos.

Paso 1.- Eliminamos de la tabla todos los múltiplos del 2 excepto el dos. De esta forma, eliminaremos todos aquellos números que tengan al dos como divisor y, por lo tanto, tengan tres o más divisores.
El primer número que se elimina es el 4. $(= 2 \cdot 2)$

Paso 2.- Eliminamos todos los múltiplos de 3 excepto el tres. El primer múltiplo de 3 es el 6 pero ya está eliminado al ser también múltiplo de 2.

Así el primer número que realmente eliminamos es el 9. (= 3 · 3)

Paso 3.- Eliminaríamos todos los múltiplos de 4. Lo que ocurre es que como el 4 es múltiplo de 2, todos los múltiplos de 4 también lo son de 2 y, por lo tanto, ya están eliminados.

Paso 4.- Eliminamos los múltiplos de 5.

$5 \cdot 2 = 10$	(Ya está eliminado al ser múltiplo de 2)
$5 \cdot 3 = 15$	(Ya está eliminado al ser múltiplo de 3)
$5 \cdot 4 = 20$	(Ya está eliminado al ser múltiplo de 4 y, por tanto, de 2)

El primero que eliminamos es el 25. (= 5 · 5)

Paso 5.- Eliminaríamos los múltiplos de 6 pero como 6 es 2 · 3 , todos los múltiplos de 6 ya están eliminados al serlo también de 2 y de 3.

Paso 6.- Eliminamos los múltiplos de 7.

$7 \cdot 2 = 14$	(Ya lo está al ser múltiplo de 2)
$7 \cdot 3 = 21$	(Ya lo está al ser múltiplo de 3)
$7 \cdot 4 = 28$	(Ya lo está al ser múltiplo de 4 y, por lo tanto, de 2)
$7 \cdot 5 = 35$	(Ya lo está al ser múltiplo de 5)
$7 \cdot 6 = 42$	(Ya lo está al ser múltiplo de 6 y, por tanto, de 2 y de 3)
$7 \cdot 7 = 49$	(Es el primero que eliminamos)

Paso 7.- Eliminaríamos los múltiplos de 8. Ya lo están al ser 8 múltiplo de 2.

Paso 8.- Eliminaríamos los múltiplos de 9. Ya lo están al ser 9 múltiplo de 3.

Paso 9.- Eliminaríamos los múltiplos de 10. Ya lo están al ser múltiplos de 2 y de 5.

Paso 10.- Eliminamos los múltiplos de 11.

$11 \cdot 2 = 22$	(Ya lo está al ser múltiplo de 2)
$11 \cdot 3 = 33$	(Ya lo está al ser múltiplo de 3)
$11 \cdot 4 = 44$	(Ya lo está al ser múltiplo de 4 y, por tanto, de 2)
$11 \cdot 5 = 55$	(Ya lo está al ser múltiplo de 5)
$11 \cdot 6 = 66$	(Ya lo está al ser múltiplo de 6 y, por tanto, de 2 y de 3)
$11 \cdot 7 = 77$	(Ya lo está al ser múltiplo de 7)
$11 \cdot 8 = 88$	(Ya lo está al ser múltiplo de 8 y, por tanto, de 2)
$11 \cdot 9 = 99$	(Ya lo está al ser múltiplo de 9 y, por tanto, de 3)
$11 \cdot 10 = 110$	(Ya lo estaría si la tabla no acabase en el 100)
$11 \cdot 11 = 121$	(Sería el primer número a eliminar si la tabla continuase)

Paso 11.- Ya hemos acabado al ser el último número de la tabla inferior a 121.

Un ejercicio interesante, que se propone al alumno, es realizar la tabla de estos primeros primos pero hasta un número natural más elevado. Por ejemplo, el 200 ó el 300 ó ...

Se procede como hemos hecho hasta ahora pero continuando según los criterios que se han podido deducir:

1º.- Hay que eliminar los múltiplos de los números primos que vayamos encontrando según avanzamos en la tabla. Los múltiplos de los números compuestos ya están eliminados por los primos anteriores.

2º.- El primer número que se elimina es el cuadrado del primo.

Este procedimiento se denomina también **CRIBA DE ERATÓSTENES.**
(Busca información en una enciclopedia sobre "Eratóstenes". ¿Conoces el significado de la palabra "criba", en caso de que no, búscalo en el diccionario).

11.- DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN NÚMERO COMPUESTO EN PRODUCTO DE FACTORES PRIMOS

Todos los números compuestos se pueden descomponer en producto de otros números que sean primos. Este proceso es muy importante para muchas de las actividades que realizaremos en el futuro. Una forma de proceder, no la única, es pensar en dos números que multiplicados den el inicial. Si los números son primos, el proceso ya se ha acabado. Si algún número es compuesto, se vuelve a descomponer.

Ejemplos:

Descompongamos los primeros números compuestos:

$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$

$6 = 2 \cdot 3$

$8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$

$10 = 2 \cdot 5$

$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

$14 = 2 \cdot 7$

$15 = 3 \cdot 5$

$16 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

...

Es usual presentar la descomposición factorial de la siguiente forma:

- Cuando haya factores repetidos, se escriben en forma de potencia.
- Se ordenan de menor a mayor. Los factores más pequeños se colocan delante y los mayores detrás.

12.- REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Para realizar la descomposición factorial en números primos, es habitual proceder comprobando si ese número es divisible por un número primo determinado. En caso de que sea así, ya se tiene una pareja de factores que multiplicados entre sí dan el número que queramos descomponer.

Ejemplo:
Supongamos que queremos descomponer en factores primos el número 462.

Lo primero que habría que hacer es ver si es divisible por 2:

```
462   |2
06     231
 02
  0
```

Así, ya tenemos que $462 = 2 \cdot 231$
Ahora habría que seguir el proceso con el número 231.

Para hacer los cálculos con cierta rapidez es importante, antes de hacer la división correspondiente, ver si tenemos algún procedimiento para saber de antemano, si la división va a salir exacta o no.
Estos procedimientos se denominan **REGLAS o CRITERIOS de DIVISIBILIDAD.**
Hay reglas de divisibilidad de bastantes números naturales, pero a nosotros nos interesan de manera especial las reglas de divisibilidad de los primeros números primos.

Regla del 2.

- Un número es divisible por 2 cuando termina en cifra par. Las cifras pares son el 0 , 2 , 4 , 6 y el 8.
  Ejemplos:
  El 6 498 es divisible por 2 porque acaba en 8.
  El 95 no es divisible por 2 porque acaba en 5.

Regla del 3.

- Un número es divisible por 3 cuando al sumar todas sus cifras obtenemos un múltiplo de 3.
  Ejemplos:
  El 852 es divisible por 3 porque $8 + 5 + 2 = 15$ y 15 es múltiplo de 3
  El 163 no es divisible por 3 porque $1 + 6 + 3 = 10$ y 10 no es múltiplo de 3

Regla del 5.

- Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 ó en 5.
  Ejemplos:
  El 750 es divisible por 5 porque acaba en 0
  El 54 no es divisible por 5 porque acaba en 4

Regla del 7.

- Un número es divisible por 7 cuando:
  a) Suprimimos la cifra de las unidades.
  b) Restamos al número que queda el doble de la cifra suprimida.
  c) Repetimos el proceso cuantas veces se pueda.
  d) Al final se obtiene 0 , 7 u otro múltiplo de 7.

Ejemplos:

2 464 es divisible por 7 porque:

$$\begin{array}{rl} 246\cancel{4} & \text{El doble de 4 es 8} \\ \underline{-\ 8} & \\ 23\cancel{8} & \text{El doble de 8 es 16} \\ \underline{-\ 16} & \\ 7 & \text{Se ha obtenido 7. Por lo tanto 2 464 es divisible por 7} \end{array}$$

Otro ejemplo:
861 es divisible por 7 porque

$$\begin{array}{rl} 86\cancel{1} & \\ \underline{-\ 2} & \\ 8\cancel{4} & \\ \underline{-\ 8} & \\ 0 & \text{Se ha obtenido 0} \end{array}$$

Otro ejemplo:
820 no es divisible por 7 porque

$$\begin{array}{rl} 82\cancel{0} & \\ \underline{-\ 0} & \\ 8\cancel{2} & \\ \underline{-\ 4} & \\ 4 & \text{Se ha obtenido el 4 y 4 no es múltiplo de 7} \end{array}$$

Esta regla de divisibilidad no es muy práctica porque cuesta mucho hacer todo este proceso, además una vez que se ha obtenido que el número es divisible, hay que dividirlo; por lo que, a efectos prácticos, para saber si un número es divisible por 7 hacemos la división y lo comprobamos.

Regla del 11.

Un número es divisible por 11 cuando al sumar las cifras colocadas en lugar par y restarlo de la suma de las cifras colocadas en lugar impar (o al revés en caso de que los números obtenidos así lo requieran), se obtiene 0 , 11 u otro múltiplo de 11.

Ejemplos:

1617 es divisible por 11 porque

$1 + 1 = 2$

$6 + 7 = 13$

$13 - 2 = 11$ Se ha obtenido 11

Otro ejemplo:
385 es divisible por 11 porque
$3 + 5 = 8$
$8 - 8 = 0$ Se ha obtenido 0

Otro ejemplo:
70 928 es divisible por 11 porque
$7 + 9 + 8 = 24$
$0 + 2 = 2$
$24 - 2 = 22$ Se ha obtenido 22 y 22 es múltiplo de 11

Otro ejemplo:
74 no es divisible por 11 porque
$7 - 4 = 3$ Se ha obtenido 3 y 3 no es múltiplo de 11

13.- PROCEDIMIENTO PARA DESCOMPONER EN FACTORES PRIMOS.

Se procede dividiendo sistemáticamente por los primeros números primos. No pasando al siguiente número primo sin comprobar que el cociente obtenido ya no es divisible por el primo por el que estamos dividiendo. El proceso se acaba cuando obtenemos 1 en el cociente.

El número será igual al producto de todos los divisores. En caso de que haya varios divisores iguales, se escribe en forma de potencia.

Ejemplos:

Descomponer en factores primos el número 336

- Presentación en forma de divisiones sucesivas "en escalera":

336	2					
13	168	2				
16	08	84	2			
0	0	04	42	2		
		0	02	21	3	
			0	0	7	7
					0	1

Solución: $336 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$

- Presentación en columna:

336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$336 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$

Descomponer en factores primos el número 225.

- Presentación en forma de divisiones sucesivas:

225	3			
15	75	3		
0	15	25	5	
	0	0	5	5
			0	1

Solución: $225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$

- Presentación en forma de columna:

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Solución: $225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$

14.- MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE DOS O MÁS NÚMEROS

Dados dos (o más) números naturales se denomina máximo común divisor (M.C.D.) de esos números a otro número natural que es:

- Divisor de todos ellos.
- El mayor de los posibles.

14.1.- PRIMER MÉTODO PARA LA OBTENCIÓN DEL M.C.D.

- Se buscan todos los divisores de cada uno de los números.
- Se señalan los comunes.
- Se elige el mayor de los señalados.

Ejemplo: Averiguar el máximo común divisor de 10 y 8

Div (10) = { **1** , **2** , 5 , 10 }
Div (8) = { **1** , **2** , 4 , 8 }

Se escribe así:
M.C.D. (10 , 8) = 2

15.- MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS

Dados dos (o más) números naturales cualesquiera, se denomina mínimo común múltiplo (m.c.m.) de esos números a otro número natural que es:

- Múltiplo de ellos.
- El menor de los posibles sin contar el cero.

15.1.- PRIMER MÉTODO PARA LA OBTENCIÓN DEL m.c.m.

- Se buscan los primeros múltiplos de cada uno de los números.
- Señalamos los comunes.
- Elegimos el menor sin contar el cero.

Ejemplo: Averiguar el m.c.m. de 10 y 8

$$\dot{10} = \{ 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, \dots \}$$

$$\dot{8} = \{ 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, \dots \}$$

Se escribe así:
m.c.m. (10 , 8) = 40

16.- MÉTODO ABREVIADO PARA LA OBTENCIÓN DEL M.C.D. Y DEL m.c.m.

- Se descomponen los números en factores primos y se escribe el resultado en forma de potencia.
- Para el M.C.D. se cogen los factores comunes con el menor exponente.
- Para el m.c.m. se cogen los factores comunes con el mayor exponente y los no comunes con el exponente que lleven.

Ejemplo: Averiguar el M.C.D. y el m.c.m. de 30 y 24

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
$24 = 2^3 \cdot 3$
M.C.D. (30 , 24) = $2 \cdot 3 = 6$
m.c.m. (30 , 24) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

17.- IMPORTANTE PROPIEDAD DEL M.C.D. Y DEL m.c.m. DE DOS NÚMEROS

Dados don números naturales se cumple que: El producto de ellos dos es igual al producto de su **M.C.D.** por su **m.c.m..**

a · b = M.C.D.(a , b) · m.c.m. (a , b)

En el ejemplo anterior:

30 · 24 = M.C.D. (30 , 24) · m.c.m. (30 , 24)

30 · 24 = 6 · 120

720 = 720

18.- MÉTODO PARA AVERIGUAR TODOS LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

En el apartado 5.1.- ya vimos un procedimiento para averiguar todos los divisores de un número. Ese método era sencillo y adecuado para aquellos números que son relativamente pequeños.
Ahora, que ya conocemos la descomposición factorial, podemos atrevernos con otro método.

Para averiguar los divisores de un número:

1º.- Descomponemos el número en factores primos y lo escribimos en forma de potencia.

2º.- El número total de divisores vendrá dado por el número que resulte de multiplicar todos los exponentes incrementados en una unidad.

Ejemplo: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

El número 120 tendrá $(3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 16$ divisores

3º.- Para buscar los divisores se desarrollan las potencias del primer factor

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 = 2$ $\quad 2^2 = 4$ $\quad 2^3 = 8$

4º.- Se multiplican cada uno de los números obtenidos por cada uno de los factores de las potencias desarrolladas del segundo factor. (Sin contar la de exponente 0 que sólo se escribe en el primer factor).

En este ejemplo el segundo factor sólo tiene una potencia que es el 3 $(3^1 = 3)$

Así, multiplicamos cada uno de los números anteriores por 3

$3 \cdot 1 = 3$ $\quad 3 \cdot 2 = 6$ $\quad 3 \cdot 4 = 12$ $\quad 3 \cdot 8 = 24$

5º.- Si hay un tercer factor, se desarrollan sus potencias y se multiplican por todos los números anteriores.

En este caso hay un tercer factor pero sólo tiene una potencia.

Multiplicamos cada uno de los números obtenidos por 5

$5 \cdot 1 = 5$ $\quad 5 \cdot 2 = 10$ $\quad 5 \cdot 4 = 20$ $\quad 5 \cdot 8 = 40$

$5 \cdot 3 = 15$ $\quad 5 \cdot 6 = 30$ $\quad 5 \cdot 12 = 60$ $\quad 5 \cdot 24 = 120$

6º.- Si hubiese otro factor, desarrollamos sus potencias y multiplicamos cada una de ellas por cada uno de los números anteriores. Y así sucesivamente.

En el ejemplo ya no había más factores.

Todo este proceso se suele presentar por medio de una tabla:

	1	**2**	**4**	**8**
3	**3**	**6**	**12**	**24**
5	**5** **15**	**10** **30**	**20** **60**	**40** **120**

Div. (120) = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 8 , 10 , 12 , 15 , 20 , 24 , 30 , 40 , 60 , 120 }

Otro ejemplo: Averiguar los divisores de 540

Descomponemos el 540

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

El número 540 tiene que tener $(2 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (1 + 1) = 24$ divisores

Las potencias del primer factor son:

$2^0 = 1$ $2^1 = 2$ $2^2 = 4$

Las potencias del segundo factor son:

$3^1 = 3$ $3^2 = 9$ $3^3 = 27$

El tercer factor tiene una única potencia que es él mismo.

	1	**2**	**4**
3 9 27	**3** **9** **27**	**6** **18** **54**	**12** **36** **108**
5	**5** **15** **45** **135**	**10** **30** **90** **270**	**20** **60** **180** **540**

Div (540) = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 9 , 10 , 12 , 15 , 18 , 20 , 27 , 30 , 36 , 45 , 54 , 60 , 9 , 108 , 135 , 180 , 270 , 540 }

Otro ejemplo: Buscar los divisores de 144

$144 = 2^4 \cdot 3^2$

El 144 tiene que tener $(4 + 1) \cdot (2 + 1) = 15$ divisores

Las potencias del primer factor son:

$2^0 = 1$ $2^1 = 2$ $2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = 16$

Las del segundo factor son:

$3^1 = 3$ $3^2 = 9$

	1	**2**	**4**	**8**	**16**
3 9	**3** **9**	**6** **18**	**12** **36**	**24** **72**	**48** **144**

Div (144) = { 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 9 , 12 , 16 , 18 , 24 , 36 , 48 , 72 , 144 }

Otro ejemplo: Buscar los divisores de 150

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

El 150 tiene $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ divisores

Las potencias del primer factor son

$2^0 = 1$ $2^1 = 2$

Las del segundo factor son:

3

Las del tercer factor son

$5^1 = 5$ $5^2 = 25$

	1	**2**
3	**3**	**6**
5	**5**	**10**
	15	**30**
25	**25**	**50**
	75	**150**

Div (150) = { 1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 10 , 15 , 25 , 30 , 50 , 75 , 150 }

PRUEBA DE EVALUACIÓN UNIDAD 2

Alumno/a: ____ Fecha: ___________

1.- Escribe = o ≠ según corresponda entre cada pareja de expresiones numéricas:

10 $\dot{5}$ 32 $\dot{6}$ 40 $\dot{11}$ 6 $\dot{6}$

2.- Escribe con la notación correcta el conjunto de los múltiplos de 6.

3.- Escribe con la notación correcta el conjunto de los divisores de 24.

4.- Escribe tres números distintos de tres cifras que sean divisibles por 11.

5.- Descompón en factores primos:

720 =

2.025 =

6.- Averigua:

M.C.D. (40 , 60) =
m.c.m. (40 , 60) =

40 =
60 =

7.- Averigua:

M.C.D. (32 , 64) =
m.c.m. (32 , 64) =

32 =
64 =

8.- Averigua:

M.C.D. (75 , 56) =
m.c.m. (75 , 56) =

75 =
56 =

9.- Busca todos los divisores de 180.

10.- Escribe un número que sea mayor que 100 y primo. Explica en qué te basas para saber que es primo.

ORIENTACIONES GENERALES

1.- INTRODUCCIÓN.

En general, esta unidad no presenta excesivos problemas, excepto en lo que se refiere a la **notación** con la que se representan las relaciones entre los números. Esto sí que cuesta un poco. A nuestro juicio hay que ser algo riguroso en la exigencia de una correcta escritura de los términos y conceptos.

2.- SER MÚLTIPLO DE ...

La primera notación que crea problemas es la del punto sobre el número para indicar "múltiplo de".

Una reflexión importante es que "las matemáticas hay que hablarlas". Es decir, no hay que conformarse con que el alumno realice los cálculos, las operaciones, los problemas, ... bien en soporte escrito. Hay que pedirle que lea, que explique, que razone ...

En lo que atañe a esta unidad es importante la lectura de las expresiones matemáticas. Esta lectura debe hacerse con rigor. La repetición es importante para la asimilación.

3.- CONJUNTO DE LOS MÚLTIPLOS DE ...

De nuevo hacer hincapié en la importancia de la correcta notación: Llaves, comas, puntos suspensivos, ...

4.-SER DIVISOR DE ...

Se define a partir de la relación "ser múltiplo de". La notación de "ser divisor de ..." no se emplea tanto con lo que no debemos dedicarle demasiada atención.

5.- CONJUNTO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Presentamos dos procedimientos. El primero, más sencillo, es bueno para los números pequeños. El segundo, el más conocido, plantea cierta dificultad. De todas formas, lo importante es el concepto de ser múltiplo y ser divisor. El ser capaz de encontrar todos todos los divisores de un número, siendo éste relativamente grande, no tiene tanta importancia.

6.- NÚMEROS PRIMOS

El concepto de número primo es muy importante. Se le debe dedicar especial atención al concepto, a la idea de primo como número que no se puede descomponer en producto de otros dos más sencillos que él. Al confeccionar la tabla el alumno debe saber qué está haciendo y por qué lo está haciendo así. Se propone, como actividad voluntaria, la ampliación de la tabla. Muchos alumnos lo hacen de buen grado. Es una actividad no exenta de interés que se recomienda estimular.

7.- REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Aunque hay más reglas, se ha optado por trabajar las de los primeros primos incluyendo la del 7 que no es operativa. Las de otros números como el 4, el 6, el 8, el 9, el 10 no se mencionan. Se podrían mencionar pero el objetivo a trabajar es la descomposición en factores primos ...

8.- PRESENTACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS.

Se ha optado por la presentación en forma de divisiones sucesivas para que el alumno sea más consciente de qué es lo que está haciendo. Se debe dejar libertad para que cada alumno elija la forma en que lo va a presentar.

9.- MÉTODOS PARA AVERIGUAR EL M.C.D. Y EL m.c.m.

Consideramos de extraordinaria importancia trabajar el denominado en la unidad “primer método” porque es la forma de entender qué significa realmente el concepto de M.C.D. y m.c.m. Sólo cuando estemos ya seguros de que los alumnos saben lo que significa, pasaremos al método tradicional.

SOLUCIONES

Se presenta el proceso ordenado de:
1.- Eliminar los múltiplos del 2 a partir del 4
2.- Eliminar los múltiplos del 3 a partir del 9
3.- Eliminar los múltiplos del 5 a partir del 25
4.- Eliminar los múltiplos del 7 a partir del 49. Resultado final.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	**9**	10
11	12	**13**	14	**15**	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	**25**	26	**27**	28	**29**	30
31	32	**33**	34	**35**	36	**37**	38	**39**	40
41	42	**43**	44	**45**	46	**47**	48	**49**	50
51	52	**53**	54	**55**	56	**57**	58	**59**	60
61	62	**63**	64	**65**	66	**67**	68	**69**	70
71	72	**73**	74	**75**	76	**77**	78	**79**	80
81	82	**83**	84	**85**	86	**87**	88	**89**	90
91	92	**93**	94	**95**	96	**97**	98	**99**	100

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	**25**	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	**35**	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	**49**	50
51	52	**53**	54	**55**	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	**65**	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	**77**	78	**79**	80
81	82	**83**	84	**85**	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	**95**	96	**97**	98	99	100

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	**49**	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	**77**	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Criba: *Utensilio para separar granos de distinto grosor, consistente en una lámina agujereada, sujeta a un cerco de madera.*

Eratóstenes: *Astrónomo, geógrafo matemático y filósofo griego (siglo III a. J.C.) Célebre por su famosa "criba" para encontrar los números primos. Fue el primero en medir de un modo exacto la longitud de la circunferencia de la Tierra.*

PRUEBA DE EVALUACIÓN UNIDAD 2

1.- Escribe = o ≠ según corresponda entre cada pareja de expresiones numéricas:

$10 = \dot{5}$ $\qquad$ $32 \neq \dot{6}$ $\qquad$ $40 \neq \dot{11}$ $\qquad$ $6 = \dot{6}$

2.- Escribe con la notación correcta el conjunto de los múltiplos de 6.

$$\dot{6} = \{0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54,\ 60,\ 66,\ 72,\ \ldots\}$$

3.- Escribe con la notación correcta el conjunto de los divisores de 24.

Div (24) = { 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 12 , 24 }

4.- Escribe tres números distintos de tres cifras que sean divisibles por 11.

121 $\qquad$ 341 $\qquad$ 902

5.- Descompón en factores primos:

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$2.025 = 3^4 \cdot 5^2$

6.- Averigua:

M.C.D. (40 , 60) = $2^2 \cdot 5 = 20$
m.c.m. (40 , 60) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

$40 = 2^3 \cdot 5$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

7.- Averigua:

M.C.D. (32 , 64) = $2^5 = 32$
m.c.m. (32 , 64) = $2^6 = 64$

$32 = 2^5$
$64 = 2^6$

8.- Averigua:

M.C.D. (75 , 56) = *1*

m.c.m. (75 , 56) = *$3 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \cdot 7$ = 4.200*

75 = *$3 \cdot 5^2$*
56 = *$2^3 \cdot 7$*

9.- Busca todos los divisores de 180.

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

	1	**2**	**4**
3 9	**3** **9**	**6** **18**	**12** **36**
5	**5** **15** **45**	**10** **30** **90**	**20** **60** **180**

Div (180) = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 9 , 10 , 12 , 15 , 18 , 20 , 30 , 36 , 45 , 60 , 90 , 180 }

10.- Escribe un número que sea mayor que 100 y primo. Explica en qué te basas para saber que es primo.

Siguiendo el criterio seguido para buscar los primeros primos: El primer compuesto que cada primo eliminaba era el cuadrado del mismo. Así la tabla la acabábamos con el 7 porque el siguiente primo, el 11, el primer compuesto que eliminaría sería el 112 = 121
Luego basta encontrar un número comprendido entre 100 y 121 que no sea divisible por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7.
*Por ejemplo el **101***

UNIDAD 2 **SOLUCIONES CONTROL CONOCIMIENTOS PREVIOS**

1.- En el monedero llevo sólo monedas de 50 ptas. ¿Cuánto dinero llevo sabiendo que tengo más de 500 ptas. pero menos de 600? ¿Cuántas monedas llevo?

Llevo 550 ptas. con 11 monedas.

2.- El autobús A sale cada 10 minutos y el autobús B cada 15. A las doce del mediodía han salido los dos autobuses a la vez. ¿A qué hora volverán a salir otra vez los dos juntos?

Vuelven a coincidir a las 12,30 h.

3.- La división de 6 entre 4 no es exacta:

$$\begin{array}{l|l} 6 & 4 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

¿Sabrías encontrar los cuatro números que dividen exactamente a 6? Escríbelos en el círculo y haz la división.

$$\begin{array}{l|l} 6 & \mathit{1} \\ \hline \mathit{0} & \mathit{6} \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 6 & \mathit{2} \\ \hline \mathit{0} & \mathit{3} \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 6 & \mathit{3} \\ \hline \mathit{0} & \mathit{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 6 & \mathit{6} \\ \hline \mathit{0} & \mathit{1} \end{array}$$

4.- ¿Tienes alguna idea sobre lo que puede ser el concepto de **número primo**?

Es aquel número que sólo es divisible por 1 y por sí mismo.

5.- ¿Sabes cuándo un número es divisible por dos?

Cuando acaba en cifra par: 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; u 8

6.- ¿Sabes qué propiedad tiene el **1** como número divisor?

Que es divisor de todos los números.

7.- ¿Sabes lo que significan las siglas **M.C.D.**?

Máximo Común Divisor

8.- ¿Y estas otras: **m.c.m.**?

mínimo común múltiplo

9.- ¿Sabes encontrar un número par que sea divisible por 3?

Por ejemplo el 6 ; el 12 ; el 18 ; ...

10.- ¿Sabes encontrar un número que sea divisible por 2 por 3 y por 5 a la vez?

Por ejemplo el 30 ; el 60 ; el 90 ; ...

-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14

Unidad 3

Los Números Enteros.

-15
-16
-17
-18
-19
-20

Alumno/a:____ **Fecha:**________

UNIDAD 3 **CONTROL DE CONOCIMIENTOS PREVIOS**

1.- En el ascensor, ¿con qué símbolo numérico está representado el primer sótano?

2.- ¿ Con qué símbolo numérico se representa la temperatura de 10 grados bajo cero?

3.- ¿Sabrías resolver esta resta?

$12 - 15 =$

4.- ¿Y esta suma?

$4 + (-7) =$

5.- ¿Sabrías encontrar un número que sumado con el 5 nos diese 0?

$5 + \boxed{} = 0$

6.- En estos momentos, además de no tener nada, le debo a mi hermano 10 000 ptas. ¿Cuánto dinero tengo?

7.- ¿Sabrías encontrar una segunda solución a esta raíz cuadrada?

$\sqrt[2]{9} = 3$

$\sqrt[2]{9} =$

8.-Escribe dos números que, sin ser decimales, sean menores que 0

9.- ¿Sabes la solución?

$(-5)^0 =$

10.- ¿Y la de esta otra potencia?

$4^{(-1)} =$

M A T E M Á T I C A S

5º EDUCACIÓN BÁSICA DE PERSONAS ADULTAS

U N I D A D D I D Á C T I C A 3

LOS NÚMEROS ENTEROS

1.- NECESIDAD DE NUEVOS NÚMEROS

Con los números que conocemos hasta ahora, los números naturales:

$$\mathbf{N} = \{ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{6},\ \mathbf{7},\ \mathbf{8},\ \mathbf{9},\ \mathbf{10},\ \mathbf{11},\ \mathbf{12},\ \ldots \}$$

No podemos resolver todas las operaciones.
Por ejemplo, la resta.
Al número natural 1 000 le queremos restar el número natural 1 500

$$1\ 000 \ - \ 1\ 500 \ = \ ?$$

Decimos que la operación no tiene solución. O, más correctamente, que no tiene solución en **N**, es decir, no existe ningún número natural que sea la solución de esa operación.
Pero esta operación se nos puede presentar como un hecho real de la vida corriente. Por ejemplo, pensemos en una cuenta corriente que una persona tiene en una entidad bancaria. Esa persona tiene un saldo de 1 000 ptas. y, contra esa cuenta, se presenta un recibo de 1 500 ptas. El banco podría devolver el recibo al no tener la cuenta suficiente saldo. O también, podría afrontar su pago y anotar en el saldo de esa persona el dinero que, momentáneamente, el banco le presta al cliente para poder afrontar el pago del recibo. En este caso el dinero que tiene que poner el banco es de 500 ptas. Esto quiere decir que, tras pagar el recibo, el cliente tiene en su cuenta un saldo negativo de 500 ptas.
Son lo que vulgarmente se ha venido denominando "números rojos" y cuyo nombre correcto es **números negativos**.
Se representan con un signo menos delante.

$$1\ 000 \ - \ 1\ 500 \ = \ -500$$

2.- LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Son unos nuevos números que se representan con el signo menos delante:

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ -7,\ -8,\ -9,\ -10,\ -11,\ -12,\ \ldots$$

Por cada número natural hay un número negativo, el mismo número con el signo – delante, salvo el número cero que no tiene negativo o, dicho de otro modo, el cero es equivalente al – 0.

3.- LOS NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números naturales

$$\mathbf{N} = \{ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{6},\ \ldots \}$$

junto con los nuevos números negativos, forman el conjunto de los números enteros.
Se representan con la letra Z y, si los escribimos ordenados de menor a mayor, se representan así:

$$\mathbf{Z} = \{ \ldots -4, -3, -2, -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ldots \}$$

Los puntos suspensivos al principio indican que no existe el número entero más pequeño, es decir, que dado un número entero muy pequeño siempre podemos encontrar uno menor que él.

4.- LOS NÚMEROS POSITIVOS

Son los números naturales sin contar el cero.
Así, los números enteros se pueden agrupar en tres partes:

Números enteros		
	Números Positivos	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , ...
	Cero	0
	Números Negativos	– 1 , – 2 , – 3 , – 4 , – 5 , ...

A los números positivos, a veces, se les suele representar con el signo + delante:

$+1, \ +2, \ +3, \ +4, \ +5, \ +6, \ +7, \ \ldots$

Así, en general

$$\boxed{+\mathbf{a} = \mathbf{a}}$$

Esta forma de escribir los positivos (con un + delante), origina uno de los primeros problemas al trabajar con números enteros. Nosotros vamos a elegir, de entrada, la forma simplificada. Es decir, escribiremos 4 en lugar de + 4 y realizaremos esta simplificación cuando sea necesario.
El problema viene también creado por el hecho de que el signo – indica dos realidades:

– : Operación de restar
– : Signo de un número negativo

También el signo + indica dos realidades:

+ : Operación de sumar
+ : Signo de un número positivo

El discriminar cuando los signos indican una u otra realidad viene dado por el contexto. Al estudiante esto le crea ciertos problemas que sólo la práctica (y a veces también, un buen método de enseñanza), puede resolver.

5.- LA RECTA NUMÉRICA

Los números enteros se pueden representar en una línea recta.

Tomaremos un punto arbitrario como cero y llevaremos una misma distancia hacia la derecha y hacia la izquierda. Los puntos que se originen serán los números enteros.

```
... -----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---   ...
        –8    –7   –6   –5    –4    –3   –2    –1     0     1     2     3     4     5     6     7     8
```

6.- VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

Es el valor que tiene ese número sin tener en cuenta el signo.
Se escribe:

$|+6| = 6$ $\qquad$ $|-6| = 6$ $\qquad$ $|6| = 6$

El valor absoluto de +6 es 6
El valor absoluto de –6 es 6
El valor absoluto de 6 es 6

7.- LA RESTA YA ES POSIBLE SIEMPRE

Ahora ya se puede resolver cualquier resta de números naturales.
Cuando el substraendo es mayor que el minuendo el resultado es un número negativo cuyo valor absoluto es la diferencia entre los valores absolutos de los dos números.

$5 - 7 = -2$
$9 - 12 = -3$
$200 - 350 = -150$

8.- OPERACIONES EN Z

Hasta ahora no hemos operado con números enteros. Sólo hemos visto cómo estos números resolvían restas de números naturales. Tenemos que ver todas las operaciones con el conjunto de todos los números enteros.

9.- SUMA

Recordemos que sumar es "juntar".

9.1.- POSITIVO CON POSITIVO

En este caso la suma de números enteros coincide con la suma de números naturales.

9.2.- POSITIVO CON NEGATIVO

Sumar una cantidad positiva con otra negativa es restar una de la otra y colocar el signo de la de mayor valor absoluto:

$8 + (-5) =$

Hay que colocar el –5 entre paréntesis para que no "choquen" los dos signos.
Restamos 8 con 5. El resultado es 3. Como 8 es mayor que 5 y el 8 es positivo, entonces el 3 también es positivo:
$8 + (-5) = 3$

Otro ejemplo:

$9 + (-10) =$

Restamos el 10 con el 9. El resultado es 1. Como el 10 es mayor que el 9 y el 10 es negativo, el 1 es también negativo:

$9 + (-10) = -1$

9.3.- NEGATIVO CON POSITIVO

Es el mismo caso que el anterior.
Se restan los números y el resultado es del signo que sea el mayor de los dos en valor absoluto.

$-9 + 5 = -4$
$-9 + 14 = 5$

9.4.- NEGATIVO CON NEGATIVO

Se suman y el resultado es negativo.

$-7 + (-6) = -13$

Observa que el primer número no lleva paréntesis porque no "choca" con ningún otro signo.
Muchas veces, sin embargo, se suele poner "por estética":

$(-7) + (-6) = -13$

10.- RESTA

Restar es quitarle a la primera cantidad, la segunda.
Esta definición no vale cuando la segunda cantidad es negativa.
En este caso, decimos que restar es responder a la pregunta: **¿Cuánto le falta a la segunda cantidad (sustraendo) para llegar a ser como la primera (minuendo)?**

Si la respuesta es que no le falta sino que le sobra, el resultado es un número negativo.

EJEMPLOS:

```
... -----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---  ...
        –8    –7    –6    –5    –4    –3    –2    –1     0     1     2     3     4     5     6     7     8
```

3 – 1 = 2

```
... -----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---  ...
        –8    –7    –6    –5    –4    –3    –2    –1     0     1     2     3     4     5     6     7     8
```

2 – 3 = – 1

```
... -----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---  ...
        –8    –7    –6    –5    –4    –3    –2    –1     0     1     2     3     4     5     6     7     8
```

2 – (– 3) = 5

```
... -----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---  ...
        –8    –7    –6    –5    –4    –3    –2    –1     0     1     2     3     4     5     6     7     8
```

– 3 – 5 = – 8

```
... -----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---  ...
        –8    –7    –6    –5    –4    –3    –2    –1     0     1     2     3     4     5     6     7     8
```

– 7 – (– 3) = – 4

```
... -----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---  ...
        –8    –7    –6    –5    –4    –3    –2    –1     0     1     2     3     4     5     6     7     8
```

– 2 – (– 8) = 6

Esta forma de interpretar la resta no es práctica. Otra forma de hacerlo es considerar a la resta como la suma del **opuesto**.

El opuesto de un número es ese mismo número pero con el signo cambiado. Así, el opuesto de 3 es – 3. El opuesto de – 4 es 4.

<u>EJEMPLOS:</u>

3 – 1 = 3 + (– 1) = 2

2 – 3 = 2 + (– 3) = – 1

2 – (– 3) = 2 + 3 = 5

$-3 - 5 = -3 + (-5) = -8$

$-7 - (-3) = -7 + 3 = -4$

$-2 - (-8) = -2 + 8 = 6$

11.- SUMA Y RESTA COMO ÚNICA OPERACIÓN

Vamos a considerar a la suma y resta de números enteros como una única operación que consiste en juntar números positivos y negativos suprimiendo el signo + de sumar y el signo – de restar y quedándonos con los signos + de número positivo (salvo si el número positivo está en primer lugar, que no se pone), y con el signo – de número negativo.

Recorremos todos los casos posibles:

1.- Suma de positivo con positivo.

$3 + 7 =$

El signo + de sumar puede considerarse el signo positivo del 7. Consiste en juntar 3 positivos con 7 positivos.

$3 + 7 = 10$

2.- Suma de positivo con negativo.

$3 + (-7) =$

Suprimimos el signo + de sumar

$3 + (-7) = 3 - 7 =$

Consiste en juntar 3 positivos con 7 negativos: "Ganan" los negativos por 4.

$3 + (-7) = 3 - 7 = -4$

Otro ejemplo:

$10 + (-2) =$

Suprimimos el signo + de sumar

$10 + (-2) = 10 - 2 =$

Juntamos 10 positivos con 2 negativos. "Ganan" los positivos por 8.

$10 + (-2) = 10 - 2 = 8$

3.- Suma de negativo con positivo.

$-5 + 2 =$

No suprimimos ningún signo. El signo + de sumar puede considerarse como el signo positivo del 2. Si juntamos 5 negativos con 2 positivos, el resultado es 3 negativos.

$-5 + 2 = -3$

Otro ejemplo:

$-5 + 7 =$

Es el mismo caso pero ahora "ganan" los positivos:

$-5 + 7 = 2$

4.- Suma de negativos.

$-3 + (-5) =$

Suprimimos el signo + de sumar

$-3 + (-5) = -3 - 5 =$

Juntamos 3 negativos con 5 negativos y el resultado es 8 negativos.

$-3 + (-5) = -3 - 5 = -8$

5.- Resta de positivos.

$7 - 2 =$

Consideramos esta resta como la suma de 7 positivos con 2 negativos.

$7 - 2 = 5$

Otro ejemplo:

$7 - 10 =$

Aquí es como si juntásemos 7 positivos con 10 negativos. El resultado es 3 a favor de los negativos.

$7 - 10 = -3$

6.- Resta de positivo con negativo.

$3 - (-2) =$

Convertimos esta resta en la suma del opuesto (ya explicado en el apartado **10.-** página 83).

$3 - (-2) = 3 + 2 = 5$

<u>7.- Resta de negativo con positivo.</u>

$-3 - 7 =$

Es sumar el negativo 3 con el negativo 7:

$-3 - 7 = -10$

<u>8.- Resta de negativos.</u>

$-3 - (-2) =$

Lo convertimos en la suma del opuesto:

$-3 - (-2) = -3 + 2 = -1$

Otro ejemplo:

$-5 - (-1) =$

$-5 - (-1) = -5 + 1 = -4$

Regla general de simplificación:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{+(-a) = -a} \\ \mathbf{-(-a) = +a = a} \end{array}}$$

Ejercicios ya simplificados de suma/resta:

$3 + 5 =$	$-5 - 6 =$
$-1 + 8 =$	$-2 - 8 =$
$-3 - 2 =$	$-3 + 2 =$
$8 - 4 =$	$-8 - 10 =$
$7 - 9 =$	$4 - 9 =$

$-3 - 2 =$	$6 - 1 =$
$10 - 13 =$	$5 + 9 =$

Ejercicios para simplificar y resolver:

$8 - (-2) =$

$-5 + (-5) =$

$-6 + (-3) =$

$-7 - (-4) =$

$10 + (-8) =$

$8 + (-8) =$

12.- PRODUCTO DE NÚMEROS ENTEROS

12.1.- POSITIVO POR POSITIVO

Multiplicar un número positivo por otro positivo es realizar una suma con tantos sumandos iguales al primer número como indique el segundo.

$3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$

12.2.- POSITIVO POR NEGATIVO

Para justificarlo acudiremos a la propiedad conmutativa de la multiplicación:

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$$

Entonces tenemos que:

$5 \cdot (-3) = (-3) \cdot 5 =$

Por lógica consiste en la suma de cinco sumandos iguales a -3

$5 \cdot (-3) = (-3) \cdot 5 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$

12.3.- NEGATIVO POR POSITIVO

Ya lo hemos visto en el caso anterior:

$(-5) \cdot 4 = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20$

12.4.- NEGATIVO POR NEGATIVO

Su justificación es un poco compleja.
Nos creeremos, sin más, que al multiplicar dos números negativos se obtiene un número positivo

$(-4) \cdot (-6) = 24$

Resumen. Regla de los signos:

$+ \cdot + = +$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$
$- \cdot - = +$

13.- DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Considerando la división como la operación inversa de la multiplicación, obtenemos los siguientes resultados:

$6 \cdot 5 = 30 \longrightarrow 30 : 5 = 6$

$6 \cdot (-5) = -30 \longrightarrow (-30) : (-5) = 6$

$(-6) \cdot 5 = -30 \longrightarrow (-30) : 5 = -6$

$(-6) \cdot (-5) = 30 \longrightarrow 30 : (-5) = -6$

Observemos la regla de los signos que hemos obtenido:

$+ : + = +$
$- : - = +$
$- : + = -$
$+ : - = -$

Esta regla, como se puede observar, es la misma que la regla de los signos de la multiplicación.

14.- POTENCIA DE NÚMEROS ENTEROS

14.1.- BASE POSITIVA Y EXPONENTE POSITIVO

Ya lo hemos visto puesto que coincide con las potencias de números naturales.

14.2.- BASE NEGATIVA Y EXPONENTE POSITIVO

No hay ninguna dificultad. Únicamente debemos tener cuidado al multiplicar los signos negativos.

$$(-2)^1 = -2$$
$$(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$$
$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$$
$$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$$
$$(-2)^5 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -32$$

Regla de los signos:

Cuando la base es negativa y el exponente es par el resultado es positivo.
Cuando la base es negativa y el exponente es impar el resultado es negativo.

14.3.- BASE POSITIVA Y EXPONENTE NEGATIVO

De acuerdo con la definición inicial de potencia:

$$4^{(-3)}$$

consistiría en realizar una multiplicación de 4 por sí mismo tantas veces como diga el exponente, en este caso, –3. Esto, lógicamente, no tiene sentido. En cambio, los matemáticos se han puesto de acuerdo en darle un significado a esta expresión:

$$4^{(-3)} = \frac{1}{4^3}$$

En general:

$$\boxed{a^{(-n)} = \frac{1}{a^n}}$$

Para explicar este resultado acudimos a la fórmula de la división de potencias de la misma base:

$$a^n : a^m = a^{(n-m)}$$

$$4^5 : 4^8 = 4^{(5-8)} = 4^{(-3)}$$

Pero esto se puede resolver realizando las potencias por separado y simplificando:

$$4^5 : 4^8 = \frac{4^5}{4^8} = \frac{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4} = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}}{4\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot4\cdot4} = \frac{1}{4^3}$$

Así, para que la fórmula de la división de potencias funcione siempre, se acordó que la potencia de exponente negativo es igual a 1 dividido por la misma potencia pero elevada a exponente positivo.

14.4.- BASE NEGATIVA Y EXPONENTE NEGATIVO

Es parecido al caso anterior pero ahora la base sigue siendo negativa:

$$(-a)^{(-n)} = \frac{1}{(-a)^n}$$

Ejemplo:

$$(-2)^{(-3)} = \frac{1}{(-2)^3}$$

14.5.- BASE POSITIVA O NEGATIVA Y EXPONENTE CERO

Cualquier número positivo o negativo elevado a exponente 0 es igual a 1

$$a^0 = 1$$
$$(-a)^0 = 1$$

La justificación de estos resultado se hace a partir de la división de potencias de la misma base:

$$3^2 : 3^2 = 3^0$$

Pero también se puede resolver realizando previamente las potencias
$$3^2 : 3^2 = 9 : 9 = 1$$

Lo mismo ocurre cuando las bases son negativas:

$$(-2)^3 : (-2)^3 = (-2)^0$$
$$(-2)^3 : (-2)^3 = (-8) : (-8) = 1$$

15.- RADICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Trabajaremos muy poco las raíces con números enteros. Solamente señalar alguna novedad respecto a las raíces de números naturales.

- La primera es observar que las raíces cuadradas de los números positivos tienen dos soluciones: La positiva y la negativa:

$$\sqrt[2]{64} = 8$$

Pero también:

$\sqrt[2]{64} = -8$

Porque

$(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = 64$

Esta doble solución de la raíz cuadrada se suele representar así:

$\sqrt[2]{64} = \pm 8$

- Las raíces cuadradas de los números negativos no tienen solución. O, más exactamente, no tienen solución en el campo numérico de los enteros.

$\sqrt[2]{-4} = ?$

No hay ningún número entero que multiplicado por sí mismo de –4

- La raíz cúbica de un número positivo tiene solución positiva:

$\sqrt[3]{8} = 2$

- La raíz cúbica de un número negativo tiene solución negativa:

$\sqrt[3]{-8} = -2$

16.- SUMAS Y RESTAS COMBINADAS. Forma simplificada

La forma simplificada consiste en una tira de números positivos y negativos.
Ejemplo:

$-3+2-1-5+6=$

Una forma de resolverlo es operando de dos en dos tal como vienen ordenados:

$-3+2-1-5+6=-1-1-5+6=-2-5+6=-7+6=\boxed{-1}$

Pero es mucho más práctico resolverlo agrupando delante todos los números positivos, detrás todos los negativos. Sumar primero todos los positivos por un lado y todos los negativos por otro. Y, finalmente, sumar (restar), el resultado positivo con el resultado negativo colocando en la solución el signo correspondiente al resultado mayor en valor absoluto.

$-3+2-1-5+6=$

$2+6-3-1-5=$

$8-9=$

$\boxed{-1}$

Observa como el 2 se ha podido escribir sin el signo + delante al pasar al primer lugar de la tira.

Otro ejemplo:

$$8-1-2-5+2=8+2-1-2-5=10-8=\boxed{2}$$

17.- SUMAS Y RESTAS COMBINADAS. Forma no simplificada

En este caso aparecen paréntesis separando los signos + y –. La mejor forma de resolverlo es simplificar los signos eliminando los paréntesis de acuerdo con las reglas ya explicadas en el apartado **11.-** página 8:

$$+(-a)=-a$$
$$-(-a)=+a=a$$

Ejemplo:

$$8+(-3)-(-5)+7-(-3)-5+4=$$
$$8-3+5+7+3-5+4=$$
$$8+5+7+3+4-3-5=$$
$$27-8=$$
$$\boxed{19}$$

Otro ejemplo:

$$-7+6-3-(-5)+2-1=$$
$$-7+6-3+5+2-1=$$
$$6+5+2-7-3-1=$$
$$13-11=$$
$$\boxed{2}$$

18.- SUMAS Y RESTAS CON PARÉNTESIS

Hasta ahora los paréntesis con los que hemos trabajado tenían como misión "separar" dos signos. Otro uso de los paréntesis es indicar que, en una expresión de varios números con operaciones, las indicadas dentro del paréntesis se deben realizar en primer lugar:

Ejemplo:

$$8-3+2=8+2-3=10-3=7$$
$$8-(3+2)=8-5=3$$

Como se puede comprobar en el ejemplo anterior el resultado de las dos expresiones es distinto.

18.1.- RESOLUCIÓN DE LAS SUMAS Y RESTAS CON ( ). Primer método.

Consiste en resolver primero la suma o resta que está encerrada en el paréntesis.

Ejemplos:

$5-(-5+3)=5-(-2)=5+2=7$
$6-(-1-4)=6-(-5)=6+5=11$
$-4+(7-3)=-4+4=0$
$-3+(-4+10)=-3+6=3$
$7+(-5+2)=7+(-3)=7-3=4$

El paréntesis puede estar colocado en otra posición:

$(-5-1)+3=-6+3=-3$
$-4-(-7+5)-2=-4-(-2)-2=-4+2-2=2-4-2=2-6=-4$

O puede haber más de un paréntesis:

$4-(-1-3)-7+(-2+5)=4-(-4)-7+3=4+4-7+3=4+4+3-7=11-7=4$

Ejercicios para practicar:

$8-(-9+4)=$

$-4+(8-2)=$

$2-(-10+5)=$

$-1+(5-9)=$

$-3-(-2-5)=$

$4+(3+2)=$

$(-5+9)-2=$

$9-4+(-5+4)=$

$3+(5-10)+3=$

$-2-(-4-5)+(7-3)=$

18.2.- RESOLUCIÓN DE SUMAS Y RESTAS CON ( ). Segundo método.

Otro procedimiento muy útil consiste en eliminar los paréntesis, según el siguiente criterio:

- "Cuando hay un + delante de un paréntesis, se va el +, se va el paréntesis, y lo que hay dentro se queda como está".
- "Cuando hay un – delante de un paréntesis, se va el –, se va el paréntesis, y lo que hay dentro cambia de signo".

Este procedimiento es más efectivo que el método anterior y permite resolver todo tipo de expresiones (siempre que sean sumas y restas).
Vamos a resolver los ejemplos anteriores. Compara los procesos y observa que el resultado es el mismo:

$5-(5+3)$

Observa que el 5 dentro del paréntesis es positivo. No lleva el signo + porque está al principio del paréntesis. Ahora, eliminaremos el menos de delante del paréntesis pero al 5 le cambiaremos de signo: Como es positivo, pasa a ser negativo. El 3 que es positivo pasa a ser negativo:

$5-(5+3)=5-5-3=5-8=-3$

Siguientes ejemplos:

$6-(-1-4)=6+1+4=11$

$-4+(7-3)=-4+7-3=7-4-3=7-7=0$

$-3+(-4+10)=-3-4+10=10-3-4=10-7=3$

$7+(-5+2)=7-5+2=7+2-5=9-5=4$

$(-5-1)+3=$

En este último caso, como no hay nada delante del paréntesis, consideramos que hay un +. De la misma manera que cuando un número no lleva signo delante, es un número positivo. Así que, aplicando la regla, eliminamos el paréntesis y lo que hay dentro se queda como está.

$(-5-1)+3=-5-1+3=3-5-1=3-6=-3$

$-4-(-7+5)-2=-4+7-5-2=7-4-5-2=7-11=-4$

$4-(-1-3)-7+(-2+5)=4+1+3-7-2+5=4+1+3+5-7-2=13-9=4$

Ejercicios para practicar:

$8-(-9+4)=$

$-4+(8-2)=$

$2-(-10+5)=$

$-1+(5-9)=$

$-3-(-2-5)=$

$4+(3+2)=$

$(-5+9)-2=$

$9-4+(-5+4)=$

$3+(5-10)+3=$

$-2-(-4-5)+(7-3)$

Comprueba que obtienes el mismo resultado que con el método anterior.

19.- LOS CORCHETES Y PARÉNTESIS CON SUMAS Y RESTAS

El significado de los corchetes es el mismo que el de los paréntesis. Cuando ya hemos usado paréntesis, si se quiere volver a agrupar determinadas operaciones, hay que usar corchetes.

$-4-[3-(5-10)]-2=$

19.1.- RESOLUCIÓN DE EXPRESIONES CON [ ]. Primer método.
Consiste en resolver primero los paréntesis y luego los corchetes.

$-4-[3-(5-10)]-2=-4-[3-(-5)]-2=-4-[3+5]-2=-4-8-2=-14$

19.2.- RESOLUCIÓN DE EXPRESIONES CON [ ]. Segundo método.
Consiste en eliminar los paréntesis primero y, una vez eliminados éstos, eliminar los corchetes.

$-4-[3-(5-10)]-2=-4-[3-5+10]-2=-4-3+5-10-2=5-4-3-10-2=5-19=-14$

20.- PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN RESPECTO DE LA SUMA/RESTA.

Cuando un número multiplica a dos o más números que están sumados o restados (positivos o negativos), es como si el número multiplicase a cada uno de los sumandos.

Fórmula general:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Teniendo en cuenta que los números **a** , **b** , y **c** son números enteros y pueden ser positivos y negativos.
En general, para saber el signo de **a·b** y el signo de **a·c**, multiplicaremos los signos de cada uno de los números y el signo resultado lo colocaremos delante.

Ejemplo:

$$-3 \cdot (8 - 5) =$$

Multiplicamos 3 por 8 = 24. El signo – por el signo + es –. Luego el 24 es negativo:–24.
(Hemos multiplicado el signo menos del 3 por el signo más del 8)

Multiplicamos 3 por 5 = 15. El signo – por – es +. Luego el 15 es positivo: +15
(Hemos multiplicado el signo menos del 3 por el signo menos del 5)

$$-3 \cdot (8 - 5) = -24 + 15 = -9$$

Otro ejemplo:

$$2 \cdot (7 - 5) =$$

Multiplicamos 2 por 7 = 14. El signo + por el signo + es +. Luego el 14 es positivo:14.
(Hemos multiplicado el signo más del 2 por el signo más del 7)

Multiplicamos 2 por 5 = 10. El signo + por – es –. Luego el 10 es negativo: –10
(Hemos multiplicado el signo más del 2 por el signo menos del 5)

$$2 \cdot (7 - 5) = 14 - 10 = 4$$

Ejercicios para practicar:

$2 \cdot (3+6) =$

$5 \cdot (6-4) =$

$3 \cdot (7-10) =$

$5 \cdot (-3+11) =$

$5 \cdot (-9+6) =$

$8 \cdot (-5-3) =$

$-7 \cdot (-5-8) =$

$-4 \cdot (8+4) =$

$-2 \cdot (5-9) =$

$-3 \cdot (-4+7) =$

$-6 \cdot (4-1) =$

$-5 \cdot (-4+2) =$

$7 \cdot (-3+4) =$

<u>21.- COMPROBACIÓN DE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA</u>

Las expresiones anteriores pueden ser resueltas sin acudir a la propiedad distributiva.

Como la suma o la resta viene dentro de un paréntesis, deberemos resolverlo con anterioridad a la multiplicación, si no deseamos resolverlo por medio de la propiedad distributiva.

Ejemplos:

$-3 \cdot (8-5) = -3 \cdot 3 = -9$

$2 \cdot (7-5) = 2 \cdot 2 = 4$

Como puedes observar este procedimiento es más sencillo que el de la propiedad distributiva. En cambio, esta propiedad es muy útil cuando trabajemos las ecuaciones. De aquí que debamos aprenderla bien.

Ejercicios:
Resuelve las siguientes expresiones solucionando antes los paréntesis y comprueba que el resultado final coincide con el que hemos obtenido con la propiedad distributiva.

$2 \cdot (3 + 6) =$

$5 \cdot (6 - 4) =$

$3 \cdot (7 - 10) =$

$5 \cdot (-3 + 11) =$

$5 \cdot (-9 + 6) =$

$8 \cdot (-5 - 3) =$

$-7 \cdot (-5 - 8) =$

$-4 \cdot (8 + 4) =$

$-2 \cdot (5 - 9) =$

$-3 \cdot (-4 + 7) =$

$-6 \cdot (4 - 1) =$

$-5 \cdot (-4 + 2) =$

$7 \cdot (-3 + 4) =$

PRUEBA DE EVALUACIÓN UNIDAD 3

Alumno/a: ____ Fecha: ___________

1.- Realiza las siguientes sumas/restas de números enteros:

$3 - 5 =$ $\qquad$ $-6 - 3 =$

$-2 + 9 =$ $\qquad$ $7 - 10 =$

2.- Simplifica y resuelve:

$8 - (-3) =$ $\qquad$ $-3 - (-2) =$

$-2 + (-5) =$ $\qquad$ $4 + (-2) =$

3.- Resuelve:

$3 \cdot -2 =$ $\qquad$ $0 \cdot (-3) =$

$-5 \cdot (-4) =$ $\qquad$ $-1 \cdot (-5) =$

4.- Resuelve:

$100 : (-20) =$ $\qquad$ $-4 : 2 =$

$-60 : (-10) =$ $\qquad$ $-30 : (-5) =$

5.- Resuelve las siguientes potencias:

$(-2)^2 =$ $\qquad$ $(-1)^4 =$

$(-3)^3 =$ $\qquad$ $(-20)^0 =$

6.- Resuelve las siguientes raíces escribiendo todas las soluciones si hay más de una:

$\sqrt[2]{9} =$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-1} =$

$\sqrt[2]{25} =$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-8} =$

7.-Resuelve

a) $-2 - 3 - (-1) + (-2) =$

b) $-(-3) - (-1) - 5 + (-6) =$

8.- Resuelve:

a) $6 - (-7 - 10) =$

b) $-5 - (8 - 12) =$

9.- Resuelva aplicando la propiedad distributiva:

a) $6 \cdot (-3 - 6) =$

b) $-3 \cdot (7 - 2) =$

10.- Resuelve las dos expresiones anteriores sin aplicar la propiedad distributiva.

ORIENTACIONES GENERALES

1.- INTRODUCCIÓN.

Esta unidad presenta importantes dificultades para los alumnos.
La didáctica del concepto, uso y operaciones con los números negativos es uno de los mayores retos a los que se puede enfrentar un maestro en estos niveles de enseñanza.
Parte de esta dificultad se deriva del hecho del doble uso de los signos + y – :

- Como signos de sumar y restar.
- Como signos positivo y negativo de los números.

Y de la simplificación que conlleva el escribir los positivos sin el signo cuando nos conviene que, por otro lado, es casi siempre.
Ante esta problemática, una de las opciones experimentada con éxito por el autor de estas unidades consiste en, durante el transcurso del aprendizaje, escribir todos los números positivos con el signo + delante.
Así la suma

$$5 + 8 = 13$$

Se convierte en

$$(+5) + (+8) = +13$$

Y la resta

$$5 - 8 = -3$$

Se convierte en

$$(+5) - (+8) = -3$$

Y así con todas las operaciones, para pasar, después, a un proceso de simplificación que, de todas formas, hay que hacer con cuidado.

La segunda opción, que es la que se ha elegido en esta unidad, es partir de la simplificación natural de los signos procediendo con cuidado a trabajar cada una de las operaciones: La suma no crea ninguna dificultad. La resta, en cambio, es bastante difícil.
Para empezar se hace una justificación del restar números positivos y negativos como la respuesta a la pregunta ¿cuánto le falta al sustraendo para llegar al minuendo?
Esta explicación es convincente pero su trabajo debe hacerse en la recta numérica y esto crea ciertos problemas.
Así se pasa a definir la resta como la "suma del opuesto". Ahora ya se salvan parte de las dificultades.
El último paso consiste en ver la suma y la resta como una única operación de "unión" de números positivos y negativos escritos eliminando los signos de sumar y restar y dejando únicamente los signos positivos y negativos de los números cuando no haya más remedio que ponerlos.
Estos primeros pasos en la suma y resta hay que darlos con cuidado y dedicando el tiempo necesario. Un mal aprendizaje de la suma y resta impide continuar con las siguientes operaciones.

2.- EL PRODUCTO Y LA DIVISIÓN

Su aprendizaje es mucho más fácil.
La única pega que se puede poner es que, en contra de lo que es habitual, no se ha justificado adecuadamente el producto de negativo por negativo.
Algunos textos lo hacen a partir de historias más o menos complicadas que no nos convencen demasiado.

La explicación más convincente puede ser una demostración por reducción al absurdo implicando a la división como operación inversa de la multiplicación.
Veamos:

$$\begin{array}{llll} Si & 3\cdot 4=12 & \Rightarrow & 12\div 4=3 \quad con\, lo\, que: \\ & +\cdot + = + & \Rightarrow & + \div + = + \\ Si & 3\cdot(-4)=-12 & \Rightarrow & -12\div(-4)=3 \quad con\, lo\, que \\ & +\cdot - = - & \Rightarrow & - \div - = + \\ Si & -3\cdot 4=-12 & \Rightarrow & -12\div 4=-3 \quad con\, lo\, que \\ & -\cdot + = - & \Rightarrow & - \div + = - \end{array}$$

Nos queda la definición de $- \cdot -$

Supongamos que fuese $-$. O sea: $- \cdot - = -$

$$Si \quad -\cdot - = - \quad \Rightarrow \quad - \div - = -$$

Lo cual es imposible pues ya antes se vio lo contrario.
Así que sólo nos queda: $- \cdot - = +$ con lo cual:

$$\begin{array}{llll} Sería & -3\cdot(-4)=12 & \Rightarrow & 12\div(-4)=-3 \\ & -\cdot - = + & \Rightarrow & + \div - = - \end{array}$$

3.- POTENCIACIÓN.
Una vez vista la multiplicación, no crea demasiados problemas. Si acaso la potencia de exponente negativo que se debe trabajar algo más.

4.-LA RADICACIÓN.
Sólo hay que trabajar un poco más, las raíces de índice dos y, un poco, las de índice tres.

5.- SUMAS Y RESTAS COMBINADAS.
Al hacer la simplificación de:

$$\boldsymbol{a + (- b)}$$

Muchos dicen "más por menos es menos". A nosotros no nos gusta esta interpretación. Creemos que es mejor pensar que se está sumando a con el número negativo b y que eso, de acuerdo con las leyes de la simplificación ya vistas consiste en escribir :

$$\boldsymbol{a - b}$$

6.- LOS PARÉNTESIS.
Dan un cierto trabajo pero, una vez visto con tiempo suficiente, no es muy problemático.

7.- LOS CORCHETES.
No hay que dedicarle demasiada atención.

8.- LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.
Es muy importante. Hay que trabajarla con cuidado. Es también interesante por trabajar los signos del producto y de la suma/resta a la vez.

SOLUCIONES

Ejercicios propuestos en la página 86:

$3 + 5 = 8$

$-1 + 8 = 7$

$-3 - 2 = -5$

$8 - 4 = 4$

$7 - 9 = -2$

$-3 - 2 = -5$

$10 - 13 = -3$

$-5 - 6 = -11$

$-2 - 8 = -10$

$-3 + 2 = -1$

$-8 - 10 = -18$

$4 - 9 = -5$

$6 - 1 = 5$

$5 + 9 = 14$

Ejercicios para simplificar y resolver:

$8 - (-2) = 8 + 2 = 10$

$-5 + (-5) = -5 - 5 = -10$

$-6 + (-3) = -6 - 3 = -9$

$-7 - (-4) = -7 + 4 = -3$

$10 + (-8) = 10 - 8 = 2$

$8 + (-8) = 8 - 8 = 0$

Ejercicios propuestos en la página 93:

$8 - (-9 + 4) = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13$

$-4 + (8 - 2) = -4 + 6 = 2$

$2 - (-10 + 5) = 2 - (-5) = 2 + 5 = 7$

$-1 + (5 - 9) = -1 + (-4) = -1 - 4 = -5$

$-3 - (-2 - 5) = -3 - (-7) = -3 + 7 = 4$

$4 + (3 + 2) = 4 + 5 = 9$

$(-5 + 9) - 2 = 4 - 2 = 2$

$9 - 4 + (-5 + 4) = 9 - 4 + (-1) = 9 - 4 - 1 = 9 - 5 = 4$

$3 + (5 - 10) + 3 = 3 + (-5) + 3 = 3 - 5 + 3 = 6 - 5 = 1$

$-2 - (-4 - 5) + (7 - 3) = -2 - (-9) + 4 = -2 + 9 + 4 = -2 + 13 = 11$

Ejercicios propuestos en la página 94:

$8 - (-9 + 4) = 8 + 9 - 4 = 17 - 4 = 13$

$-4 + (8 - 2) = -4 + 8 - 2 = 8 - 6 = 2$

$2 - (-10 + 5) = 2 + 10 - 5 = 12 - 5 = 7$

$-1 + (5 - 9) = -1 + 5 - 9 = 5 - 10 = -5$

$-3 - (-2 - 5) = -3 + 2 + 5 = 2 + 5 - 3 = 7 - 3 = 4$

$4 + (3 + 2) = 4 + 3 + 2 = 9$

$(-5 + 9) - 2 = -5 + 9 - 2 = 9 - 5 - 2 = 9 - 7 = 2$

$9 - 4 + (-5 + 4) = 9 - 4 - 5 + 4 = 9 + 4 - 4 - 5 = 13 - 9 = 4$

$3 + (5 - 10) + 3 = 3 + 5 - 10 + 3 = 3 + 5 + 3 - 10 = 11 - 10 = 1$

$-2 - (-4 - 5) + (7 - 3) = -2 + 4 + 5 + 7 - 3 = 4 + 5 + 7 - 2 - 3 =$
$16 - 5 = 11$

Ejercicios propuestos en la página 96:

$2 \cdot (3 + 6) = 6 + 12 = 18$

$5 \cdot (6 - 4) = 30 - 20 = 10$

$3 \cdot (7 - 10) = 21 - 30 = -9$

$5 \cdot (-3 + 11) = -15 + 55 = 40$

$5 \cdot (-9 + 6) = -45 + 30 = -15$

$8 \cdot (-5 - 3) = -40 - 24 = -64$

$-7 \cdot (-5 - 8) = 35 + 56 = 91$

$-4 \cdot (8 + 4) = -32 - 16 = -48$

$-2 \cdot (5 - 9) = -10 + 18 = 8$

$-3 \cdot (-4 + 7) = 12 - 7 = 5$

$-6 \cdot (4-1) = -24 + 6 = -18$

$-5 \cdot (-4+2) = 20 - 10 = 10$

$7 \cdot (-3+4) = -21 + 28 = 7$

Ejercicios propuestos en la página 98:

$2 \cdot (3+6) = 2 \cdot 9 = 18$

$5 \cdot (6-4) = 5 \cdot 2 = 10$

$3 \cdot (7-10) = 3 \cdot (-3) = -9$

$5 \cdot (-3+11) = 5 \cdot 8 = 40$

$5 \cdot (-9+6) = 5 \cdot (-3) = -15$

$8 \cdot (-5-3) = 8 \cdot (-8) = -64$

$-7 \cdot (-5-8) = -7 \cdot (-13) = 91$

$-4 \cdot (8+4) = -4 \cdot 12 = -48$

$-2 \cdot (5-9) = -2 \cdot (-4) = 8$

$-3 \cdot (-4+7) = -3 \cdot 3 = -9$

$-6 \cdot (4-1) = -6 \cdot 3 = -18$

$-5 \cdot (-4+2) = -5 \cdot (-2) = 10$

$7 \cdot (-3+4) = 7 \cdot 1 = 7$

PRUEBA DE EVALUACIÓN UNIDAD 3

1.- Realiza las siguientes sumas/restas de números enteros:

$4 - 5 = -2$ $\qquad$ $-6 - 3 = -9$

$-2 + 9 = 7$ $\qquad$ $7 - 10 = -3$

2.- Simplifica y resuelve:

$9 - (-3) = 8 + 3 = 11$ $\qquad$ $-3 - (-2) = -3 + 2 = -1$

$-2 + (-5) = -2 - 5 = -7$ $\qquad$ $4 + (-2) = 4 - 2 = 2$

3.- Resuelve:

$3 \cdot -2 = -6$ $\quad$ $0 \cdot (-3) = 0$

$-5 \cdot (-4) = 20$ $\quad$ $-1 \cdot (-5) = 5$

4.- Resuelve:

$100 : (-20) = -5$ $\quad$ $-4 : 2 = -2$

$-60 : (-10) = 6$ $\quad$ $-30 : (-5) = 6$

5.- Resuelve las siguientes potencias:

$(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$ $\quad$ $(-1)^4 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = 1$

$(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$ $\quad$ $(-20)^0 = 1$

6.- Resuelve las siguientes raíces escribiendo todas las soluciones si hay más de una:

$\sqrt[2]{9} = \pm 3$ $\quad$ $\sqrt[3]{-1} = -1$

$\sqrt[2]{25} = \pm 5$ $\quad$ $\sqrt[3]{-8} = -2$

7.- Resuelve

a) $-2 - 3 - (-1) + (-2) = -2 - 3 + 1 - 2 = 1 - 2 - 3 - 2 = 1 - 7 = -6$

b) $-(-3) - (-1) - 5 + (-6) = 3 + 1 - 5 - 6 = 4 - 11 = -7$

8.- Resuelve:

a) $6 - (-7 - 10) = 6 + 7 + 10 = 23$

b) $-5 - (8 - 12) = -5 - 8 + 12 = 12 - 5 - 8 = 12 - 13 = -1$

9.- Resuelva aplicando la propiedad distributiva:

a) $6 \cdot (-3 - 6) = -18 - 36 = -54$

b) $-3 \cdot (7 - 2) = -21 + 6 = -15$

10.- Resuelve las dos expresiones anteriores sin aplicar la propiedad distributiva.

a) $6 \cdot (-3 - 6) = 6 \cdot (-9) = -54$

b) $-3 \cdot (7 - 2) = -3 \cdot 5 = -15$

UNIDAD 3 SOLUCIONES CONTROL DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

1.- En el ascensor, ¿con qué símbolo numérico está representado el primer sótano?

– 1

2.- ¿ Con qué símbolo numérico se representa la temperatura de 10 grados bajo cero?

– 10

3.- ¿Sabrías resolver esta resta?

12 – 15 = *– 3*

4.- ¿Y esta suma?

4 + (– 7) = *– 3*

5.- ¿Sabrías encontrar un número que sumado con el 5 nos diese 0?

$5 + \boxed{-5} = 0$

6.- En estos momentos, además de no tener nada, le debo a mi hermano 10 000 ptas. ¿Cuánto dinero tengo?

– 10 000 ptas.

7.- ¿Sabrías encontrar una segunda solución a esta raíz cuadrada?

$$\boxed{\sqrt[2]{9} = 3}$$

$$\boxed{\sqrt[2]{9} = -3}$$

8.-Escribe dos números que, sin ser decimales, sean menores que 0

– 1 *– 2*

9.- ¿Sabes la solución?

$$\boxed{(-5)^0 = 1}$$

10.- ¿Y la de esta otra potencia?

$$\boxed{4^{(-1)} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}}$$

1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
1/7
1/8
1/9
2/3
2/5
2/7
2/9
3/2
3/4

Unidad 4

Los Números Racionales.

3/7
4/3
5/6
2/3
3/5
4/5

Alumno/a:____ **Fecha:**_______

UNIDAD 4 **CONTROL DE CONOCIMIENTOS PREVIOS**

1.- ¿Tienes alguna idea de lo que significa o puede significar el **"número racional"**?

2.- Quiero **tres cuartos** de kilo de carne de ternera para guisar. ¿Sabrías escribir con cifras esta cantidad?

3.- Juan se come la **mitad** de una tarta y Pedro **dos cuartos** de la misma tarta, ¿quién ha comido más cantidad de tarta?

4.- Las **tres cuartas** partes de los alumnos de una clase han aprobado. Si en la clase hay **28** alumnos, ¿cuántos han suspendido?

5.- ¿Sabes por qué número se puede multiplicar a **4** para que el resultado sea **1**?

6.- ¿Sabes poner en forma de fracción sencilla el siguiente número?

$$1\frac{1}{2} =$$

7.- ¿Qué fracción es mayor?

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}$$

8.- ¿Sabrías escribir la cantidad **cuarto y mitad**? ¿Sabes a cuantos **gramos** equivale esta cantidad?

9.- He comprado **medio** kilo de almendras, **cuarto** de cacahuetes y **tres cuartos** de avellanas, ¿cuántos **kilos** de frutos secos he comprado en total?

10.- Esto es la fotocopia de un d__________ de lotería.
¿Sabes por qué se llama así?
El primer premio de este sorteo consiste en 600.000 €
En el supuesto que este premio recayese en este número.
¿Qué premio correspondería al poseedor de este billete?

M A T E M Á T I C A S

5º EDUCACIÓN BÁSICA DE PERSONAS ADULTAS

U N I D A D D I D Á C T I C A 4

LOS NÚMEROS RACIONALES

1.- NECESIDAD DE NUEVOS NÚMEROS

Con los números enteros,

$$\mathbf{Z} = \{ \ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}$$

no podemos resolver todas las operaciones.
Ejemplo:

Quiero repartir 5 tartas en dos partes iguales:

$5 : 2 = ?$

No hay ningún número entero que sea la respuesta exacta de esta operación.
Lo podemos resolver por aproximación:

$5 : 2 \approx 2$ (aproximación por defecto)

$5 : 2 \approx 3$ (aproximación por exceso)

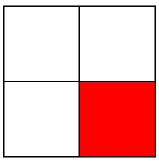
Pero para poder dar la respuesta exacta, necesitamos nuevos números.
Necesitamos números que nos permitan representar cantidades no enteras.

2.- LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

Los *números fraccionarios*, los *números quebrados*, *las fracciones* o *los quebrados* (todas estas expresiones equivalen al mismo concepto), son números que nos permiten representar cantidades no enteras (y también las enteras).
Para ello nos valemos, a su vez, de dos números naturales separados por una rayita horizontal.

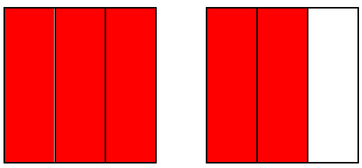
$$\frac{a}{b}$$

El número de abajo (**denominador**), representa las partes iguales en que se ha dividido la unidad.
El número de arriba (**numerador**), indica las partes que se consideran.



$$\frac{1}{4}$$

1 es el numerador
4 es el denominador
La fracción se lee *"un cuarto"*



$$\frac{5}{3}$$

5 es el numerador
3 es el denominador
La fracción se lee *"cinco tercios"*

El numerador y el denominador son los **términos** de la fracción.

3.- FRACCIONES PROPIAS E IMPROPIAS

Se llama **fracción propia** a aquella fracción cuyo numerador es menor que el denominador.

Ejemplo:

$\frac{2}{5}$ *"dos quintos"*

También podemos decir que una fracción es propia cuando es menor que la unidad.

$$\frac{2}{5} < 1$$

En general será una fracción propia aquella fracción que sea:

$$\frac{a}{b} < 1$$

Se llama **fracción impropia** a aquella fracción cuyo numerador es mayor que el denominador.

Ejemplo

$\frac{7}{5}$ *"siete quintos"*

También podemos decir que una fracción es impropia cuando es mayor que la unidad

$$\frac{7}{5} > 1$$

En general será una fracción impropia aquella que sea:

$$\frac{a}{b} > 1$$

4.- FRACCIONES IGUALES A UN NÚMERO NATURAL

Cuando el numerador es un múltiplo exacto del denominador, la fracción equivale al número natural correspondiente al cociente entre el numerador y el denominador.

Ejemplos:

$$\frac{4}{2} = 2 \quad \textit{cuatro medios}$$

$$\frac{21}{7} = 3 \quad \textit{veintiún séptimos}$$

$$\frac{4}{4} = 1 \quad \textit{cuatro cuartos}$$

$$\frac{12}{3} = 4 \quad \textit{doce tercios}$$

$$\frac{45}{9} = 5 \quad \textit{cuarenta y cinco novenos}$$

$$\frac{32}{4} = 8 \quad \textit{treinta y dos cuartos}$$

5.- NÚMERO MIXTO

Las fracciones impropias se pueden escribir como la suma de un número natural y otra fracción propia.

Ejemplo:

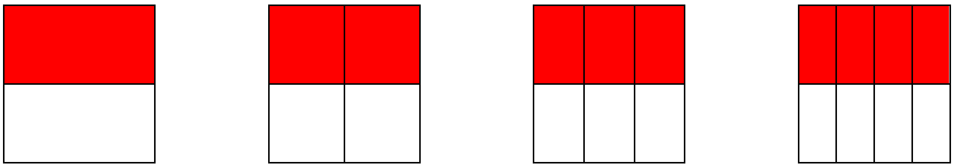
$$\frac{7}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5}$$

Se suele escribir así:

$$\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

6.- FRACCIONES EQUIVALENTES

El primer problema que plantean los números fraccionarios es que, para representar una misma cantidad, existen infinitas posibilidades:



Decimos que

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots$$

Son fracciones equivalentes (que valen igual).

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$$

"Un medio = dos cuartos = tres sextos = cuatro octavos =..."

<u>7.- MÉTODO PARA BUSCAR FRACCIONES EQUIVALENTES</u>

Dada una fracción cualquiera, podemos buscar otras fracciones equivalentes a ella, simplemente multiplicando a los dos términos de la fracción por el mismo número natural.

Ejemplos:
Busquemos fracciones equivalentes a

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$ *"seis octavos"*

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$ *"nueve doceavos"*

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{12}{16}$$ *"doce dieciseisavos"*

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$ *"quince veinteavos"*

En general:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}}$$

A esta búsqueda de fracciones equivalentes multiplicando a los dos términos de la fracción por otro número natural se le denomina **<u>amplificar</u>**.

8.- MÉTODO GENERAL PARA SABER SI DOS FRACCIONES SON EQUIVALENTES

El método más general para saber si dos fracciones son equivalentes, consiste en:

- Multiplicar el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda.
- Multiplicar el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.
- Si los números obtenidos son iguales, las fracciones son equivalentes. Si no lo son, las fracciones no son equivalentes.

Ejemplos:

$\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ $6 \cdot 12 = 72$ $9 \cdot 8 = 72$

$\frac{2}{3} \neq \frac{5}{7}$ $2 \cdot 7 = 14$ $3 \cdot 5 = 15$

En general:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

9.- FRACCIÓN SIMPLIFICADA O REDUCIDA

Dada una fracción cualquiera, podemos intentar averiguar la fracción que, siendo equivalente, está escrita con los términos más pequeños posibles.

Ejemplo:

$$\frac{100}{250} = \frac{2}{5}$$

10.- MÉTODO PARA AVERIGUAR LA FRACCIÓN SIMPLIFICADA O IRREDUCIBLE

El concepto de fracción simplificada o irreducible es muy importante. <u>Siempre presentaremos las fracciones en su forma simplificada.</u>
El método más rápido para averiguar la fracción simplificada es dividir el numerador y el denominador por el M.C.D. de estos dos números.
El problema es que hay que averiguar este M.C.D. y, quizá, en este proceso, perdamos cierto tiempo.

Ejemplo: Queremos simplificar la fracción:

$$\frac{100}{250}$$

Averiguaremos, por tanto, el M.C.D.(100 , 250)

Para ello, descomponemos en factores primos:

$100 = 2^2 \cdot 5^2$

$250 = 2 \cdot 5^3$

M.C.D.(100,250)= $2 \cdot 5^2 = 50$

Dividiremos, por tanto, a los dos términos de la fracción por 50:

$$\frac{100}{250} = \frac{100 \div 50}{250 \div 50} = \frac{2}{5}$$

Este método no es aconsejable a no ser, que conozcamos de antemano el M.C.D.
El método más aconsejable es dividir al numerador y al denominador sucesivamente por los primeros números primos por los cuales ambos sean divisibles. Haciéndolo de forma sistemática, es decir, no se pasa al 3 sin haber acabado con el 2. No se pasa al 5 sin haber acabado con el 3 ...

$$\frac{100}{250} = \frac{100 \div 2}{250 \div 2} = \frac{50}{125} = \frac{50 \div 5}{125 \div 5} = \frac{10}{25} = \frac{10 \div 5}{25 \div 5} = \frac{2}{5}$$

El proceso se suele presentar sin indicar las operaciones que realizamos:

$$\frac{100}{250} = \frac{50}{125} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

El proceso se termina cuando:

a) Los dos términos (numerador y denominador) son primos.

$$\frac{7}{13}$$

b) Uno de ellos es primo y el otro no es múltiplo de ese primo.

$$\frac{5}{8}$$

c) Ninguno de ellos es primo pero no tienen divisores en común.

$$\frac{6}{25}$$

Los tres casos se resumen en:
Una fracción es irreducible cuando el numerador y el denominador son primos entre sí.

Cuando en el proceso de simplificación, o en cualquier otro momento, el denominador de una fracción es 1, la fracción equivale al número natural representado por el numerador.

$$\frac{16}{8}=\frac{8}{4}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2$$

En general:

$$\boxed{\frac{a}{1}=a}$$

11.- FRACCIONES DE TÉRMINOS ENTEROS

Por extensión se pueden considerar fracciones cuyo numerador y/o denominador sea cualquier número entero.

El cero nunca puede estar en el denominador.

Son fracciones de términos enteros:

$$\frac{-3}{4},\frac{2}{-5},\frac{-7}{-5},\frac{1}{-3},\frac{5}{4},\frac{-7}{-8},\frac{0}{3},\frac{7}{1},\frac{0}{-2},\frac{-4}{1},\ldots$$

11.1.- SIMPLIFICACIÓN DE SIGNOS

Una fracción puede ser positiva, negativa o cero.

Fracciones de carácter positivo:

Son aquellas cuyo numerador y denominador son del mismo signo

$$\frac{3}{4},\frac{-5}{-7}$$

Si los dos términos son positivos, no hay ningún problema, la fracción ya está simplificada en cuanto a signos se refiere.

Si los dos términos son negativos, se eliminan los signos y la fracción es equivalente a la misma fracción pero de términos positivos.

$$\frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$$

Observa que esta igualdad es correcta, de acuerdo con la regla general para saber si dos fracciones son equivalentes, presentada en el apartado **8.-** de esta unidad didáctica (página 114)

$$(-5) \cdot 7 = (-7) \cdot 5$$

En general, simplificaremos así:

$$\boxed{\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}}$$

Fracciones de carácter negativo

Son aquellas cuyo numerador y denominador son de distinto signo.

$$\frac{-2}{5}, \frac{3}{-4}, \ldots$$

Si el término negativo es el numerador, la fracción ya está simplificada en cuanto a signos se refiere.
Si el término negativo es el denominador, la fracción es equivalente a otra fracción con los mismos términos en valor absoluto pero con el numerador negativo y el denominador positivo.

$$\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$$

Observa que se cumple que:

$$3 \cdot 4 = (-4) \cdot (-3)$$

En general simplificaremos así:

$$\boxed{\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}}$$

También puede escribirse la fracción con términos positivos y poner delante el signo negativo:

$$\boxed{\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}}$$

Estas dos últimas expresiones se consideran igualmente simplificadas. Nosotros vamos a optar por elegir la primera opción.

Fracciones cero

Cuando la fracción no es positiva ni negativa, entonces es cero y su simplificación es hacerla igual al numero natural y entero, cero.

$$\frac{0}{4}=0$$

$$\frac{0}{-7}=0$$

En general, simplificaremos así:

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{0}{a}=0\\[2em]\dfrac{0}{-a}=0\end{array}}$$

12.- EL NÚMERO RACIONAL

Se considera número racional a cada una de las cantidades distintas que se pueden representar utilizando fracciones de términos enteros.

$$\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}=\frac{2}{4}=\frac{-2}{-4}=\frac{3}{6}=\frac{-3}{-6}=\frac{4}{8}=\ldots$$

$$\frac{-3}{2}=\frac{3}{-2}=\frac{-6}{4}=\frac{6}{-4}=\frac{-9}{6}=\frac{9}{-6}=\frac{-12}{8}=\frac{12}{-8}=\ldots$$

$$\frac{2}{3}=\frac{-2}{-3}=\frac{4}{6}=\frac{-4}{-6}=\frac{6}{9}=\frac{-6}{-9}=\frac{8}{12}=\frac{-8}{-12}=\ldots$$

El concepto de número racional es bastante abstracto.
Por otro lado, para trabajar con números racionales tenemos que hacerlo a través de las fracciones que representan a ese número.

12.1.- REPRESENTANTE CANÓNICO DE UN NÚMERO RACIONAL

Es la fracción reducida o simplificada que lo representa de acuerdo con la simplificación de signos que ya hemos visto en el apartado **11.1.-** (página 116).

$$\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}=\frac{2}{4}=\frac{-2}{-4}=\frac{3}{6}=\frac{-3}{-6}=\dots$$

La fracción primera (1/2) es el representante canónico de este número racional.

$$\frac{-4}{5}=\frac{4}{-5}=\frac{-8}{10}=\frac{8}{-10}=\frac{-12}{15}=\frac{12}{-15}=\frac{-16}{20}=\dots$$

La fracción –4/5 es el representante canónico de este otro número racional.

A partir de este momento, hablaremos de números racionales identificándolo con el concepto de fracciones de términos enteros y aplicaremos las reglas de simplificación ya conocidas. A pesar de que esta identificación no es del todo exacta tal como ya se ha explicado.

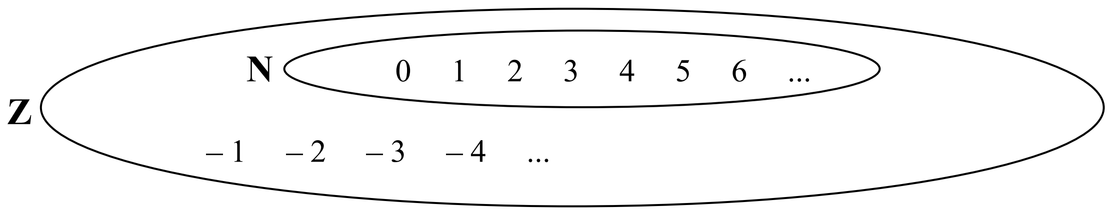
13.- AMPLIACIÓN DEL CAMPO NUMÉRICO: LOS NÚMEROS RACIONALES

Recordemos los campos numéricos conocidos:

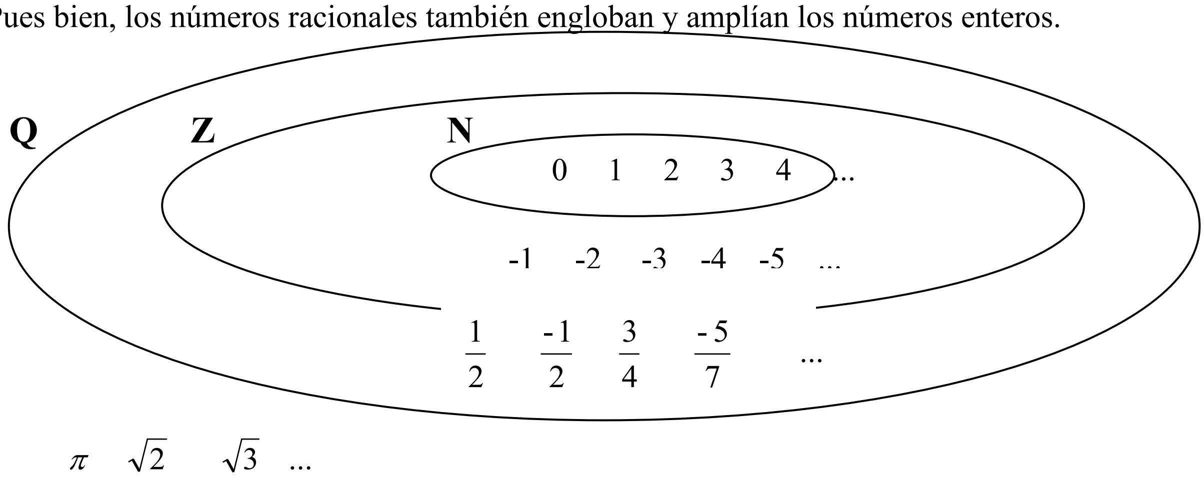
$$\mathbf{N} = \{\ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{6},\ \mathbf{7},\ \mathbf{8},\ \mathbf{9},\ \mathbf{10},\ \mathbf{11},\ \dots\}$$

$$\mathbf{Z} = \{\ \dots -\mathbf{4}, -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \dots\}$$

Los números enteros engloban y amplían los números naturales:



Pues bien, los números racionales también engloban y amplían los números enteros.



Los números colocados fuera del diagrama son números no racionales (irracionales).
Para escribir el conjunto de los números racionales “entre llaves”, debemos definir antes el conjunto de los números enteros sin el cero: **Z***

$$\mathbf{Z}^* = \{ \ \ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots \}$$

Así, el conjunto de los números racionales se puede definir así:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \ a \in \mathbf{Z}, \ b \in \mathbf{Z}^* \right\}$$

El símbolo $\in$, (pertenece a ...) indica que el elemento que va antes del símbolo pertenece al conjunto que viene después del símbolo.
Para decir que “no pertenece a ...” escribimos el símbolo $\notin$.

Así, podemos escribir:

$-3 \in Z$

$-3 \in Z^*$

$4 \in N$

$-4 \notin N$

$\frac{3}{7} \in Q$

$\frac{-7}{0} \notin Q$

$\frac{0}{5} \in Q$

$\pi \notin Q$

14.- LAS DIVISIONES DE ENTEROS YA TIENEN SOLUCIÓN

En el apartado **1.-** observábamos cómo la división de 5 entre 2 no tenía solución en el campo de los números enteros. Ahora, en el campo de los números racionales, todas las divisiones entre números enteros tienen solución.
Cuando el dividendo no es múltiplo del divisor la solución es un número racional cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor, simplificando si se puede.

En el problema planteado en el apartado **1.-** había que repartir 5 tartas en dos partes iguales.

(Ver nota)

$$5 \div 2 = \frac{5}{2}$$

La solución: Cinco medias tartas para cada una de las partes.

Ejemplos:

$$5 \div 10 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$-20 \div 12 = \frac{-20}{12} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} \qquad \textit{(Ver nota)}$$

$$-40 \div (-15) = \frac{-40}{-15} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

$$6 \div (-9) = \frac{6}{-9} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$$

*Nota: Cuando el resultado es una fracción impropia (positiva o negativa), la solución se presenta como número mixto, pero lo dejamos para más adelante.(Ver apartado **23.-** página 130)*

Cuando el dividendo es múltiplo del divisor, la solución es un número entero. Pero también en este caso la división se puede resolver a través del proceso de los números racionales:

$$-25 \div 5 = \frac{-25}{5} = \frac{-5}{1} = -5$$

15.- OPERACIONES EN Q

Tal como ocurrió en la unidad anterior con los números enteros, ahora tenemos que ver las operaciones con los números racionales. Lo único que hemos visto hasta ahora es la división entre enteros cuyo resultado era un número racional.

16.- SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

16.1.- FRACCIONES CON EL MISMO DENOMINADOR

Es otra fracción del mismo denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores.

$$\frac{-3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$$

En general:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}}$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{6}+\frac{7}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{-5}{9}+\frac{-2}{9}=\frac{-7}{9}$$

$$\frac{5}{6}+\frac{-11}{6}=\frac{-6}{6}=-1$$

16.2.- FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR

Para sumar dos fracciones de distinto denominador debemos pasar ambas a común denominador: Es decir, tenemos que buscar otras dos fracciones que sean equivalentes a cada una de ellas respectivamente pero que estén escritas con el mismo denominador.
Para ello contamos con dos procedimientos:

Procedimiento 1

1º.- Averiguamos el m.c.m. de los dos denominadores.
2º.- Este número será el denominador común de las dos nuevas fracciones.
3º.- Vemos por qué número habría que multiplicar al denominador de la primera fracción para obtener el denominador común. (Dividiendo).
4º.- Multiplicamos al numerador de la primera fracción por ese número y obtenemos el numerador de la fracción equivalente a la primera.
5º.- Repetimos los pasos 3º.- y 4º.- con la otra fracción.
6º.- Resolvemos la suma de fracciones del mismo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{11}{6}+\frac{-7}{10}=$$

Hay que buscar una fracción que sea equivalente a 11/6 y otra equivalente a − 7/10 pero que estén escritas con el mismo denominador.

Paso 1º.- Averiguamos el m.c.m. de 6 y 10:

$$6=2\cdot 3$$
$$10=2\cdot 5$$
$$m.c.m.(6,10)=2\cdot 3\cdot 5=30$$

Paso 2º.-

$$\frac{11}{6}+\frac{-7}{10}=$$

$$\frac{}{30}+\frac{}{30}=$$

Paso 3º.-

$30 \div 6 = 5$

Paso 4º.-

$11 \cdot 5 = 55$

$$\frac{11}{6}+\frac{-7}{10}=$$

$$\frac{55}{30}+\frac{}{30}=$$

Paso 5º.-

$30 \div 10 = 3$

$-7 \cdot 3 = -21$

$$\frac{11}{6}+\frac{-7}{10}=$$

$$\frac{55}{30}+\frac{-21}{30}=$$

Paso 6º.-

$$\frac{11}{6}+\frac{-7}{10}=$$

$$\frac{55}{30}+\frac{-21}{30}=\frac{34}{30}=\frac{17}{15}$$

El único problema de este procedimiento es que, a veces, cuesta un poco la obtención del m.c.m.

PROCEDIMIENTO RÁPIDO PARA LA OBTENCIÓN DEL m.c.m.

Dados dos números:

a) Elegimos el mayor.
b) Nos preguntamos ¿es múltiplo del menor?
c) Si la respuesta es SI. Ese número es el m.c.m. de los dos.
d) Si la respuesta es no, buscamos el siguiente múltiplo de ese número multiplicándolo por dos.
e) Volvemos a preguntar: ¿es múltiplo del menor?
f) Si la respuesta es SI, ese número es el m.c.m.
g) Si la respuesta es no, buscamos el siguiente múltiplo de ese número multiplicándolo por tres.
h) Volvemos a preguntar ¿es múltiplo del menor?

...

Repetimos el proceso hasta que obtengamos un SI.

Ejemplo:

m.c.m.(10 , 12)

a) Elegimos el mayor: 12
b) ¿Es múltiplo 12 de 10?. No
c) El siguiente múltiplo de 12 es 24. $(12 \cdot 2 = 24)$
d) ¿Es 24 múltiplo de 10?. No
e) El siguiente múltiplo de 12 es 36 $(12 \cdot 3 = 36)$
f) ¿Es 36 múltiplo de 10?. No
g) El siguiente múltiplo de 12 es 48 $(12 \cdot 4 = 48)$
h) ¿Es 48 múltiplo de 10?. No
i) El siguiente múltiplo de 12 es 60 $(12 \cdot 5 = 60)$
j) ¿Es 60 múltiplo de 10? SI

m.c.m. (12 , 10) = 60

En general:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(m\div b)\cdot a}{m}+\frac{(m\div d)\cdot c}{m}=\frac{(m\div b)\cdot a+(m\div d)\cdot c}{m}$$

Siendo m el m.c.m. (b , d)

Procedimiento 2.-

La idea inicial es la misma: Convertir ambas fracciones en otras equivalentes, respectivamente, a cada una de ellas, pero que tengan el mismo denominador.
Y, para evitar el cálculo del m.c.m., se procede de la siguiente forma:

a) Se multiplican los dos términos de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, obteniéndose los términos de la nueva primera fracción.
b) Se multiplican los dos términos de la segunda fracción por el denominador de la primera fracción, obteniéndose los términos de la nueva segunda fracción.
c) Se suman las nuevas fracciones ya con el mismo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{11}{6}+\frac{-7}{10}=$$

$$\frac{110}{60}+\frac{-42}{60}=\frac{68}{60}=\frac{34}{30}=\frac{17}{15}$$

En general:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}}$$

Este segundo procedimiento parecerá más fácil a algunos de los alumnos, en cambio, es preferible el primero porque es bueno acostumbrarse al manejo del m.c.m. y, porque hay algunos casos en que este segundo procedimiento no tiene ninguna ventaja. Por ejemplo, cuando un denominador es múltiplo del otro.

Veamos un caso práctico comparando ambos procedimientos:

$$\frac{-7}{10}+\frac{-5}{2}=$$

Procedimiento 1.-

$$\frac{-7}{10}+\frac{-5}{2}=\frac{-7}{10}+\frac{-25}{10}=\frac{-32}{10}=\frac{-16}{5}$$

Procedimiento 2.-

$$\frac{-7}{10}+\frac{-5}{2}=\frac{-14}{20}+\frac{-50}{20}=\frac{-64}{20}=\frac{-32}{10}=\frac{-16}{5}$$

Cuando uno de los números a sumar es un número entero, lo convertimos en la fracción equivalente colocando el entero como numerador y el 1 como denominador. Tal como ya se vio al final del apartado **10.-** página 116.

$$\boxed{a=\frac{a}{1}}$$

Ejemplo:

$$-8+\frac{2}{5}=\frac{-8}{1}+\frac{2}{5}=\frac{-40}{5}+\frac{2}{5}=\frac{-38}{5}$$

En general, siempre que en una operación, uno de los operandos sea un número entero, podemos realizar esta transformación en la fracción equivalente.

17.- RESTA DE NÚMEROS RACIONALES

Para restar dos números racionales, sumaremos a la primera fracción el opuesto de la segunda.

El opuesto de $\frac{3}{4}$ es la fracción $\frac{-3}{4}$

El opuesto de $\frac{-2}{5}$ es la fracción $\frac{2}{5}$

En general:

El opuesto de $\frac{a}{b}$ es $\frac{-a}{b}$ y el opuesto de $\frac{-a}{b}$ es $\frac{a}{b}$

Ejemplos:

$$\frac{-3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{-3}{5} + \frac{-1}{10} = \frac{-6}{10} + \frac{-1}{10} = \frac{-7}{10}$$

$$\frac{-1}{8} - \frac{-5}{6} = \frac{-1}{8} + \frac{5}{6} = \frac{-3}{24} + \frac{20}{24} = \frac{17}{24}$$

En general:

$$\boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}}$$

18.- PRODUCTO DE NÚMEROS RACIONALES

El producto de dos números racionales es otra fracción que tiene como numerador el producto de numeradores y como denominador el producto de los dos denominadores

Ejemplos:

$$\frac{-3}{5} \cdot \frac{-7}{6} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

$$\frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{5}$$

En general:

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{b \cdot c}}$$

19.- COCIENTE DE NÚMEROS RACIONALES

Para dividir dos números racionales, multiplicaremos a la primera fracción por el inverso de la segunda.
La fracción inversa de una dada es otra fracción con los términos invertidos, es decir, cambiando el numerador por el denominador y viceversa.

$$\boxed{\text{La fracción inversa de } \frac{a}{b} \text{ es } \frac{b}{a}}$$

Así:

$$\frac{4}{3} \div \frac{-2}{5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{-2} = \frac{20}{-6} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3}$$

En general:

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

Otro procedimiento para resolver una división consiste en

- Multiplicar el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y colocar el resultado en el numerador de la fracción solución.
- Multiplicar el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción y colocar el resultado en el denominador de la fracción solución.

Este procedimiento es más rápido pero menos interesante desde el punto de vista matemático.

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

20.- POTENCIACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

20.1.- BASE RACIONAL Y EXPONENTE NATURAL

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

En general:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Cuando el exponente es 1, el resultado coincide con la base:

$$\left(\frac{-6}{11}\right)^1 = \frac{(-6)^1}{11^1} = \frac{-6}{11}$$

En general:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}}$$

Cuando el exponente es cero, la potencia es igual a 1:

$$\left(\frac{-1}{4}\right)^0 = \frac{(-1)^0}{4^0} = \frac{1}{1} = 1$$

En general:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1}$$

20.2.- BASE RACIONAL Y EXPONENTE NEGATIVO

En la unidad 3, apartado 14.3.- (página 89), vimos la siguiente fórmula:

$$\boxed{a^{(-n)} = \frac{1}{a^n}}$$

Ahora podemos aplicar esta misma fórmula para una base racional, en vez de entera:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{(-n)} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

Y vamos a realizar las operaciones para intentar llegar a una expresión más sencilla:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{(-n)} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 \div \frac{a^n}{b^n} = \frac{1}{1} \div \frac{a^n}{b^n} = \frac{1}{1} \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Así podemos concluir:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{(-n)} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

La potencia de base racional y exponente negativo es igual a la potencia que tiene como base la fracción inversa y como exponente el opuesto del exponente.

20.3.- POTENCIA DE BASE RACIONAL Y EXPONENTE RACIONAL

Estas potencias sobrepasan el objetivo de este curso. No obstante, a título de curiosidad, se definen así:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}}$$

21.- RADICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Las únicas raíces de números racionales que se trabajan un poco en este curso son las raíces de radicando racional e índice natural

$$\sqrt[2]{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3} \quad \text{porque} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \quad \text{y también} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

En general:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

22.-EL NÚMERO MIXTO

Las fracciones impropias son aquellas que, en valor absoluto, son mayores que la unidad. Por tanto pueden escribirse como una parte entera sumada a una parte racional menor, en valor absoluto, a la unidad. Es lo que se conoce como número mixto (parte entera y parte racional) y se suele escribir la parte entera seguida de la racional sin ningún signo ni espacio:

Ejemplo:

$$\frac{23}{5}=\frac{20}{5}+\frac{3}{5}=4+\frac{3}{5}=4\frac{3}{5}$$

$$\frac{-17}{3}=\frac{-15}{3}+\frac{-2}{3}=-5+\frac{-2}{3}=-5\frac{2}{3}$$

En los últimos años, había caído un poco en desuso el número mixto. Ahora vuelve con fuerza a utilizarse. Una de las razones es que las calculadoras que tienen la función de las fracciones presentan siempre el resultado final como número mixto aunque los datos se hayan introducido como fracciones impropias.

23.- MÉTODO ABREVIADO PARA CONVETIR UNA FRACCIÓN IMPROPIA EN NÚMERO MIXTO.

23.1.- Fracción positiva.

- Se divide el numerador entre el denominador dejando el resto.
- El cociente de la división es la parte entera del número mixto.
- La parte racional es una fracción cuyo numerador es el resto y cuyo denominador es el divisor.

Ejemplo:

$$\frac{19}{6}=$$

$$\begin{array}{r|l} 19 & 6 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array}$$

$$\frac{19}{6}=3\frac{1}{6}$$

23.2.- Fracción negativa

Se actúa como si fuese positiva y se coloca el signo menos delante del número mixto

$$\frac{-32}{9}=$$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 9 \\ \cline{2-2} 5 & 3 \end{array}$$

$$\boxed{\frac{-32}{9}=-3\frac{5}{9}}$$

24.- MÉTODO PARA CONVERTIR UN NÚMERO MIXTO EN FRACCIÓN

Para transformar un número mixto en fracción se multiplica la parte entera por el denominador y se le suma el numerador. El resultado obtenido es el numerador de la fracción impropia. El denominador es el mismo que el de la parte racional del número mixto.

Ejemplo:

$$4\frac{5}{7}=\frac{4\cdot 7+5}{7}=\frac{33}{7}$$

$$-8\frac{2}{3}=-\frac{8\cdot 3+2}{3}=-\frac{26}{3}=\frac{-26}{3}$$

En general:

$$\boxed{a\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}}$$

Nota: El hecho de que se haya dejado de trabajar con los números mixtos es porque dificulta las operaciones. Es más fácil operar con las fracciones impropias.
Como recomendación es preferible pasar los números mixtos a fracciones para trabajar con ellas. En cambio es aconsejable al dar la solución, hacerlo siempre con números mixtos si la fracción es impropia. Así, en el apartado **14.-** de esta unidad se planteaban unas divisiones de números enteros cuya solución era un número racional que no se dejaría como fracción impropia sino que pasaría a número mixto:

$$5\div 2=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

La solución es dos tartas y media. Ver apartado **14.-** página 120

$$-20 \div 12 = \frac{-20}{12} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} = -1\frac{2}{3}$$

$$-40 \div (-15) = \frac{-40}{-15} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Y así con todos los resultados que se han ido obteniendo a lo largo de las operaciones que se han efectuado en esta unidad.

25.- LA FRACCIÓN COMO OPERADOR

25.1.- La fracción de una cantidad

Problema:

Si una tarta pesa 1 200 gr. ¿Cuánto pesarán los ¾ de la tarta?

$$1200 \div 4 = 300 \text{ gr. pesa } \frac{1}{4} \text{ de tarta.}$$

$$300 \cdot 3 = 900 \text{ gr. pesan los } \frac{3}{4} \text{ de la tarta}$$

Solución:

Los ¾ de la tarta pesan 900 gr.

Para obtener la fracción de una cantidad, se divide la cantidad por el denominador y el resultado se multiplica por el numerador.
Pero como el orden al ejecutar la multiplicación y la división es indiferente, se suele preferir hacer al revés, es decir, se multiplica la cantidad por el numerador y se divide por el denominador.
Al hacerlo de esta última forma, es como si se multiplicase la fracción por el número natural.

$$\boxed{\frac{a}{b} \text{ de } c = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b}}$$

25.2.- La fracción de otra fracción

Problema:

Los 2/5 de la población activa de un país están en el paro. De ellos, los ¾ llevan más de un año en esa situación. ¿Qué parte de la población activa lleva en el paro más de un año?

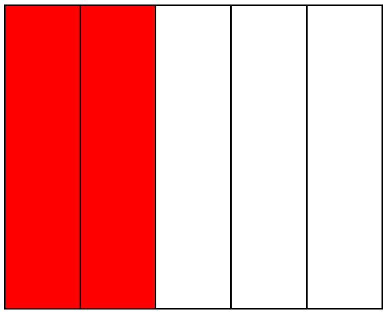
$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Solución:

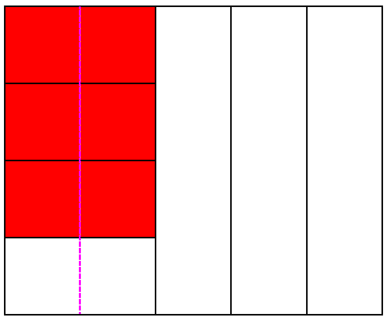
Los 3/10 de la población activa están en el paro llevando en él, más de un año.

Resolución gráfica:

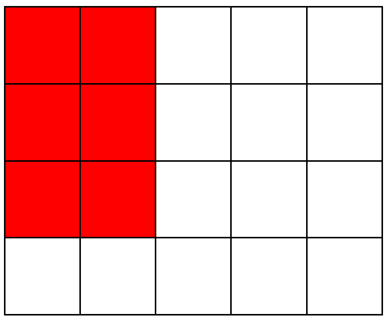
Esto es los 2/5 de la unidad:



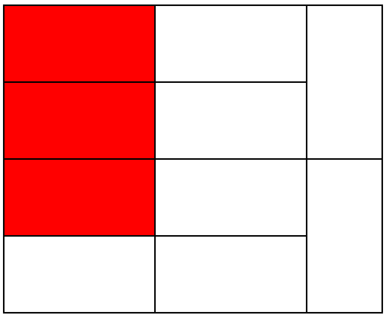
Esto es los ¾ de los 2/5:



Y, como se comprueba fácilmente, esto representa los 6/20 de la unidad:



O, lo que es lo mismo, los 3/10:



PRUEBA DE EVALUACIÓN UNIDAD 4

Alumno/a: ____ Fecha: ___________

1.- Resuelve las siguientes operaciones con fracciones simplificando y pasando a número mixto si la fracción resultado es impropia

$$\frac{1}{10}+\frac{4}{15}=$$

$$\frac{-5}{8}+\frac{-3}{8}=$$

$$\frac{7}{10}-\frac{-4}{5}=$$

$$\frac{7}{15}-2=$$

$$\frac{-3}{4}\cdot 5=$$

$$6\cdot\frac{2}{5}=$$

$$\frac{3}{5}\div\frac{-2}{3}=$$

$$\frac{-2}{7}\div 3=$$

$$\left(\frac{-2}{5}\right)^{1}=$$

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^{2}=$$

$$\sqrt[2]{\frac{4}{9}}=$$

$$\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}=$$

2.- Resuelve las siguientes divisiones de números enteros escribiendo su resultado en forma de fracción:

$10 \div 4 =$

$-20 \div 6 =$

$35 \div (-14) =$

$-5 \div (-10) =$

3.- Convierte los siguientes números mixtos en fracción impropia:

$2\frac{1}{5} =$

$-3\frac{2}{7} =$

4.- Resuelve las siguientes potencias:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{(-1)} =$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{(-2)} =$

5.- De un tonel lleno se sacan los 2/5. Más tarde, se venden los 5/6 de lo que quedaba. Si todavía quedan en el tonel 30 l. ¿Cuántos litros había al principio? ¿Qué fracción del tonel se ha quedado sin sacar?

ORIENTACIONES GENERALES

1.- INTRODUCCIÓN.

Una de las primeras consideraciones que queremos hacer es la importancia, tal como se dijo en las orientaciones de la unidad 2, de "hablar", de leer las expresiones y operaciones numéricas.
En lo que concierne a esta unidad, la lectura de las fracciones debe hacerse con rigor desde el primer momento. Se evitará hacer la lectura como si fuese una división: Es decir se evitará leer "**a** partido por **b**" al ver la fracción a/b. Como no existe otra forma de leerlo emplearemos la expresión "**a** *raya* **b**". Esto nos parece importante para diferenciar el concepto **número fraccionario** con el concepto **división entre números enteros**. Aunque, lógicamente, el resultado de ambas expresiones coincide.
Esta misma forma de lectura se empleará en aquellas fracciones con denominador 1, o número negativo:
3/1 "tres *raya* uno"
2/–3 "dos *raya* menos tres"
etc.

2.- FRACCIONES IMPROPIAS. NÚMERO MIXTO.
El concepto de fracción impropia es importante. La escritura de las fracciones en forma de número mixto se había dejado de trabajar en los últimos años.
El hecho de la internacionalización de las Matemáticas, el uso de las calculadoras, ... hace que se vuelva al trabajo del número mixto.
Todas las calculadoras científicas que operan con fracciones simplifican los resultados al número mixto correspondiente si este resultado es una fracción impropia.
Será importante, una vez trabajado de acuerdo al ritmo sugerido en la Unidad, ver las formas en que las distintas calculadoras presentes en la clase se enfrentan con la forma de trabajar y presentar los resultados fraccionarios.

3.- SIMPLIFICACIÓN DE TÉRMINOS.
Es importante acostumbrar al alumno a realizar la simplificación, dividiendo por los primeros primos, de forma ordenada.

4.- NÚMERO RACIONAL.
Tal como ya se dice en la propia Unidad, se identifica el término número racional con el de fracción de términos enteros, lo cual no es del todo exacto. Nos permitimos esta licencia para simplificar la terminología.

5.- EL NÚMERO RACIONAL COMO RESULTADO DE UNA DIVISIÓN DE ENTEROS.
Es una idea importante que sorprende a muchos de los alumnos.

$$2 \div 3 = \frac{2}{3} \qquad \text{"}\textit{dos dividido por tres es igual a dos tercios}\text{"}$$

El porqué de esta sorpresa viene, probablemente, del poco uso que se hace de las fracciones. Las fracciones no están incorporadas al bagaje operacional del alumno. Al realizar la división propuesta, el alumno tenderá a encontrar el decimal correspondiente. Es importante trabajar esta coincidencia y, eventualmente, comprobar que el resultado conseguido es el mismo. Aunque este proceso se tratará de forma ordenada y profunda en la unidad 5

De momento es importante observar cómo los números racionales resuelven el problemas de las divisiones de enteros que no tenían solución exacta en el campo de los enteros.

6.- SUMA DE FRACCIONES.

El pasar a denominador común es uno de los procesos que requiere más tiempo. Es importante ahondar en la idea de que para sumar fracciones con denominadores distintos hay que hacerlo buscando otras fracciones equivalentes que sí que estén escritas con el mismo denominador. Por eso hay que huir de expresiones mecánicas que no trabajen este proceso. Una de ellas puede ser ésta:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$

Si trabajamos la suma así, probablemente el alumno aprenderá a sumar pero no sabrá muy bien ni lo que hace ni por qué lo hace que es el principal objetivo del pensamiento matemático: **No importa tanto saber operar como entender la operación**.

Hacemos hincapié en este proceso porque muchos alumnos mayores recordarán esta forma de operar y, presentarán cierta resistencia a aprender otro algoritmo. El profesor deberá recoger los conocimientos y experiencias previos de cada uno de los alumnos y, partiendo de este conocimiento y respetando y valorando todas las aportaciones, deberá trabajar intentando que los alumnos entiendan los conceptos y los procesos. Muchas veces enfrentar dos formas de hacer las cosas puede ser una importante fuente de conocimiento.

7.- RESTA.

Se presenta como la suma del opuesto.

El concepto de número opuesto es muy importante. Ya se trabajó así en la unidad anterior. Ahora no tiene que haber mayor problema.

8.- DIVISIÓN.

Se define como el producto por el inverso. La idea de inverso es nueva. Es un concepto muy importante que hay que explotar. Por eso es mucho más interesante la definición de división como producto por el inverso que la forma tradicional de multiplicar los términos de las dos fracciones en cruz.

9.- LA FRACCIÓN COMO OPERADOR.

Es una de las aplicaciones práctica más interesantes de la unidad. Si dispusiésemos de tiempo se le podría dedicar más atención. No obstante, tal como se indica en la justificación de la elección de los contenidos, se ha optado, para este 5º curso de la EBA, por los números y las operaciones. El trabajo con situaciones problemáticas en las que haya que trabajar con las fracciones como operadores se deja para más adelante.

PRUEBA DE EVALUACIÓN UNIDAD 4

1.- Resuelve las siguientes operaciones con fracciones simplificando y pasando a número mixto si la fracción resultado es impropia

$$\frac{1}{10}+\frac{4}{15}=\frac{3}{30}+\frac{8}{30}=\frac{11}{30}$$

$$\frac{-5}{8}+\frac{-3}{8}=\frac{-8}{8}=-1$$

$$\frac{7}{10}-\frac{-4}{5}=\frac{7}{10}+\frac{4}{5}=\frac{7}{10}+\frac{8}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{15}-2=\frac{7}{15}-\frac{2}{1}=\frac{7}{15}+\frac{-2}{1}=\frac{7}{15}+\frac{-30}{15}=\frac{-23}{15}=-1\frac{8}{15}$$

$$\frac{-3}{4}\cdot 5=\frac{-3}{4}\cdot\frac{5}{1}=\frac{-15}{4}=-3\frac{3}{4}$$

$$6\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5}\div\frac{-2}{3}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{-2}=\frac{9}{-10}=\frac{-9}{10}$$

$$\frac{-2}{7}\div 3=\frac{-2}{7}\div\frac{3}{1}=\frac{-2}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{-2}{21}$$

$$\left(\frac{-2}{5}\right)^{1}=\frac{-2}{5}$$

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^{2}=\frac{-3}{2}\cdot\frac{-3}{2}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$$

$$\sqrt[2]{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}=\frac{-2}{3}$$

2.- Resuelve las siguientes divisiones de números enteros escribiendo su resultado en forma de fracción:

$$10 \div 4 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$-20 \div 6 = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3} = -3\frac{1}{3}$$

$$35 \div (-14) = \frac{35}{-14} = \frac{-35}{14} = \frac{-5}{2} = -2\frac{1}{2}$$

$$-5 \div (-10) = \frac{-5}{-10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

3.- Convierte los siguientes números mixtos en fracción impropia:

$$2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$-3\frac{2}{7} = \frac{-23}{7}$$

4.- Resuelve las siguientes potencias:

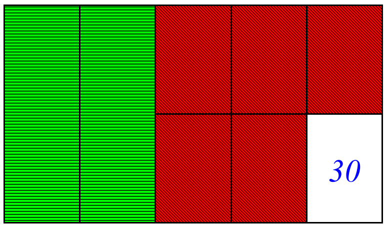
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{(-1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(-2)} = \left(\frac{4}{1}\right)^{2} = 4^{2} = 16$$

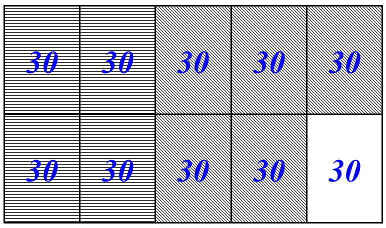
5.- De un tonel lleno se sacan los 2/5. Más tarde, se venden los 5/6 de lo que quedaba. Si todavía quedan en el tonel 30 l. ¿Cuántos litros había al principio? ¿Qué fracción del tonel se ha quedado sin sacar?

Se saca los 2/5:

Se sacan los 5/6 del resto y quedan 30 l.



Luego había:



30 · 10 = $\boxed{\textit{300 l.}}$

$\boxed{\text{Se ha quedado sin sacar l/10 del tonel}}$

UNIDAD 4 SOLUCIONES CONTROL DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

1.- ¿Tienes alguna idea de lo que significa o puede significar el **"número racional"**?

Es, más o menos, el equivalente a los antiguos "quebrados" o a los más nuevos "números fraccionarios"

2.- Quiero **tres cuartos** de kilo de carne de ternera para guisar. ¿Sabrías escribir con cifras esta cantidad?

3/4

3.- Juan se come la **mitad** de una tarta y Pedro **dos cuartos** de la misma tarta, ¿quién ha comido más cantidad de tarta?

Han comido los dos la misma cantidad

4.- Las **tres cuartas** partes de los alumnos de una clase han aprobado. Si en la clase hay **28** alumnos, ¿cuántos han suspendido?

Han suspendido 7 alumnos.

5.- ¿Sabes por qué número se puede multiplicar a **4** para que el resultado sea **1**?

Hay que multiplicarlo por ¼ o por el decimal 0,25

6.- ¿Sabes poner en forma de fracción sencilla el siguiente número?

$1\frac{1}{2} =$ Equivale a la fracción 3/2

7.- ¿Qué fracción es mayor?

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

Es mayor la fracción 1/2

8.- ¿Sabrías escribir la cantidad **cuarto y mitad**? ¿Sabes a cuantos **gramos** equivale esta cantidad?

¼ + 1/8 = 3/8 *Son 250 + 125 = 375 g.*

9.- He comprado **medio** kilo de almendras, **cuarto** de cacahuetes y **tres cuartos** de avellanas, ¿cuántos **kilos** de frutos secos he comprado en total?

He comprado 1 kg. y medio de frutos secos

10.- Esto es la fotocopia de un d*écimo de* lotería.

¿Sabes por qué se llama así? *Es la décima parte del número*
El primer premio de este sorteo consiste 600.000 €.
En el supuesto que este premio recayese en este número.
¿Qué premio correspondería al poseedor de este billete? *60.000 €*

$$\boxed{\frac{600.000}{10} = 60.000\ €}$$

1,1
2,2
3,3
4,4
5,5
6,6
7,7
8,8
9,9
10,10
11,11
12,12
13,13
14,14

Unidad 5

De los Números Racionales a los Decimales.

15,15
16,16
17,17
18,18
19,19
20,20

Alumno/a: ____ **Fecha:** __________

UNIDAD 5 **CONTROL DE CONOCIMIENTOS PREVIOS**

1.- ¿ Sabes lo que significan los datos de la pantalla de esta calculadora ?

¿ Y los datos de esta otra ?

2.- ¿ Sabes cómo se puede escribir $\frac{1}{2}$ de forma no fraccionaria ?

3.- ¿ Qué número es mayor: **1,5** ó **1,125** ?

4.- ¿ Te suenan de algo los **decimales periódicos** ?

5.- En la pantalla de una calculadora aparece:

Al **multiplicar** a esa cantidad por **3** ¿ qué crees que va a salir ?

6.- ¿ Sabrías hacer "de cabeza" ?:

$8 \div 0{,}25 =$

7.- ¿ Por qué número habría que **multiplicar** al 10 para que saliera 5 ?

$10 \cdot \quad = 5$

8.- ¿ Sabes que diferencia hay entre **décima** y **decena** ?

9.- ¿ Conoces algún **número decimal** que sea exactamente igual a un **número natural** ?

10.- ¿ Por qué número habría que **dividir** a 4 para que saliera 8 ?

$4 \div \quad = 8$

M A T E M Á T I C A S

5º EDUCACIÓN BÁSICA DE PERSONAS ADULTAS

U N I D A D D I D Á C T I C A 5

DE LOS NÚMEROS RACIONALES A LOS DECIMALES

1.- DOS CARACTERÍSTICAS DE LOS NÚMEROS RACIONALES

1.- En general, las fracciones no están construidas en el sistema decimal.

Ejemplos:

$$\frac{1}{7},\quad \frac{-3}{4},\quad \frac{5}{6},\quad \ldots$$

Se llaman **fracciones decimales** a aquellas fracciones cuyo denominador es una potencia de 10 :

$$\frac{1}{10},\quad \frac{3}{100},\quad \frac{-107}{1000},\quad \ldots$$

Las **fracciones decimales** están escritas en **base decimal**.

2.- Su escritura no es horizontal.

Nuestra escritura se realiza en líneas horizontales y de izquierda a derecha. En cambio, las fracciones se escriben en vertical y de arriba a abajo.
Esta contradicción entre ambos tipos de escritura se ha intentado resolver inclinando la raya de separación entre el numerador y el denominador.
Cuando la fracción es sencilla, la solución es buena:

$$\frac{1}{2} \text{ o también } {}^{1}\!/_{2}$$

$$\frac{-3}{4} \text{ o también } -{}^{3}\!/_{4}$$

Pero cuando se trabaja con números mixtos:

$$2\frac{5}{7}$$

O realizamos determinados cálculos y operaciones con fracciones:

$$\frac{1+5}{7}$$

Esta solución ya no es válida.

2.- LAS FRACCIONES DECIMALES

Puesto que todas las fracciones se pueden amplificar, vamos a intentar convertir las fracciones ordinarias en otras equivalentes pero que estén escritas con denominador potencia de 10:
10 , 100 , 1.000 , 10.000 , ...

Así:

Ejemplo **a)**

$$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{5}{10}$$

Ejemplo **b)**

$$2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}=\frac{13\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{26}{10}$$

A veces, no se consigue el denominador 10 pero sí el 100:

Ejemplo **c)**

$$3\frac{1}{4}=\frac{13}{4}=\frac{13\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{325}{100}$$

Ejemplo **d)**

$$\frac{-7}{25}=\frac{-7\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{-28}{100}$$

Ejemplo **e)**

$$\frac{-11}{50}=\frac{-11\cdot 2}{50\cdot 2}=\frac{-22}{100}$$

Ejemplo **f)**

$$15\frac{11}{20}=\frac{311}{20}=\frac{311\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{1555}{100}$$

A veces, no se consigue el denominador 100 pero sí el 1.000:

Ejemplo **g)**

$$\frac{5}{8}=\frac{5\cdot 125}{8\cdot 125}=\frac{625}{1000}$$

Ejemplo **h)**

$$\frac{1}{40}=\frac{1\cdot 25}{40\cdot 25}=\frac{25}{1000}$$

Ejemplo **i)**

$$2\frac{61}{200}=\frac{461}{200}=\frac{461\cdot 5}{200\cdot 5}=\frac{2305}{1000}$$

Ejemplo **j)**

$$\frac{3}{500}=\frac{3\cdot 2}{500\cdot 2}=\frac{6}{1000}$$

3.- LOS NÚMEROS DECIMALES

Recordemos cómo se escribía un número entero:

Por ejemplo: 4 325

Significa que tenemos	5 unidades	5 de	1
	2 decenas	2 paquetes de	10
	3 centenas	3 paquetes de	100
	4 millares	4 paquetes de	1000

Lo volvemos a escribir de tal forma que aparezca el valor de cada una de las unidades encima de la cifra:

1000	**100**	**10**	**1**
4	*3*	*2*	*5*

Pues bien, para expresar cantidades fraccionarias, escribiremos nuevas cifras a la derecha de la cifra de las unidades:

- La primera casilla estará ocupada por la cifra de las **décimas** o partes de la unidad dividida en diez partes iguales.
- La segunda casilla estará ocupada por la cifra de las **centésimas** o partes de la unidad dividida en cien partes iguales.
- La tercera casilla estará ocupada por la cifra de las **milésimas** o partes de la unidad dividida en mil partes iguales.
- La cuarta casilla estará ocupada por la cifra de las **diezmilésimas** o partes de la unidad dividida en diez mil partes iguales.
- La quinta casilla .... **cienmilésimas.**
- La sexta casilla ... **millonésimas.**
- La séptima casilla ... **diezmillonésimas.**
- La octava casilla ... **cienmillonésimas.**

El “esqueleto” sería éste:

10.000	**1.000**	**100**	**10**	**1**	**1/10**	**1/100**	**1/1.000**	**1/10.000**	**1/100.000**

Como, lógicamente, el "esqueleto" no lo escribiremos encima del número, **es necesario marcar la posición de las unidades**: Esto se soluciona colocando una coma entre la posición de las unidades y la de las décimas.

> Nota: La escritura anglosajona no pone coma sino punto.
> En las calculadoras deberemos marcar el punto para separar unidades y décimas.

Vamos a retomar cada una de las fracciones del apartado **2.-** y las vamos a ir colocando en el "esqueleto":

Ejemplo **a)**

$$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$$

1	**1/10**
0 ,	*5*

Es necesario colocar el 0 en las unidades para señalar la posición de las mismas.

$$\boxed{\frac{1}{2}=0{,}5}$$

Ejemplo **b)**

$$2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}=\frac{26}{10}$$

En este caso como el numerador es mayor que el denominador, podemos descomponer la fracción en otras dos: La primera con el numerador múltiplo de diez mayor posible y la segunda con el resto:

$$2\frac{3}{5}=\frac{26}{10}=\frac{20}{10}+\frac{6}{10}$$

Ahora simplificamos la fracción 20/10 al número natural 2:

$$2\frac{3}{5}=\frac{26}{10}=\frac{20}{10}+\frac{6}{10}=2+\frac{6}{10}$$

Lo escribimos en el "esqueleto":

1	**1/10**
2 ,	*6*

$$\boxed{2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}=2{,}6}$$

Nota: Observa cómo la cifra de las unidades se corresponde con la parte entera del número mixto.

Ejemplo **c)**

$$3\frac{1}{4}=\frac{13}{4}=\frac{325}{100}$$

De nuevo, como en el caso anterior, al ser 325>100, lo descomponemos. Lo único que ahora, al haber tres cifras, lo descomponemos en tres fracciones:

$$3\frac{1}{4}=\frac{13}{4}=\frac{325}{100}=\frac{300}{100}+\frac{20}{100}+\frac{5}{100}$$

Simplificando por 10 siempre que se pueda se obtiene:

$$3\frac{1}{4}=\frac{13}{4}=\frac{325}{100}=\frac{300}{100}+\frac{20}{100}+\frac{5}{100}=3+\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$$

Lo escribimos en el "esqueleto":

1	**1/10**	**1/100**
3 ,	2	*5*

$$\boxed{3\frac{1}{4}=\frac{13}{4}=3{,}25}$$

Ejemplo **d)**

$$\frac{-7}{25}=\frac{-28}{100}=-\frac{28}{100}=-\left(\frac{20}{100}+\frac{8}{100}\right)=-\left(\frac{2}{10}+\frac{8}{100}\right)$$

Lo escribimos en el "esqueleto":

1	**1/10**	**1/100**
− 0 ,	*2*	*8*

$$\boxed{\frac{-7}{25}=-0{,}28}$$

Ejemplo **e)**

$$\frac{-11}{50}=\frac{-22}{100}=-\frac{22}{100}=-\left(\frac{20}{100}+\frac{2}{100}\right)=-\left(\frac{2}{10}+\frac{2}{100}\right)$$

Lo escribimos en el "esqueleto":

1	1/10	1/100
– 0 ,	*2*	*2*

$$\boxed{\frac{-11}{50}=-0{,}22}$$

Ejemplo **f)**

$$15\frac{11}{20}=\frac{311}{20}=\frac{1555}{100}=\frac{1000}{100}+\frac{500}{100}+\frac{50}{100}+\frac{5}{100}=10+5+\frac{5}{10}+\frac{5}{100}$$

Lo escribimos en el "esqueleto":

10	1	1/10	1/100
1	*5 ,*	*5*	*5*

$$\boxed{15\frac{11}{20}=\frac{311}{20}=15{,}55}$$

Ejemplo **g)**

$$\frac{5}{8}=\frac{625}{1000}=\frac{600}{1000}+\frac{20}{1000}+\frac{5}{1000}=\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$$

Lo escribimos en el "esqueleto":

1	1/10	1/100	1/1000
0 ,	*6*	*2*	*5*

$$\boxed{\frac{5}{8}=0{,}625}$$

Ejemplo **h)**

$$\frac{1}{40}=\frac{25}{1000}=\frac{20}{1000}+\frac{5}{1000}=\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$$

Lo escribimos en el "esqueleto":

1	1/10	1/100	1/1000
0 ,	*0*	*2*	*5*

$$\boxed{\frac{1}{40} = 0{,}025}$$

Ejemplo **i)**

$$2\frac{61}{200} = \frac{461}{200} = \frac{2305}{1000} = \frac{2000}{1000} + \frac{300}{1000} + \frac{5}{1000} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{5}{1000}$$

Lo escribimos en el “esqueleto”:

1	1/10	1/100	1/1000
2 ,	*3*	*0*	*5*

$$\boxed{2\frac{61}{200} = \frac{461}{200} = 2{,}305}$$

Ejemplo **j)**

$$\frac{3}{500} = \frac{6}{1000}$$

Lo escribimos en el “esqueleto”:

1	1/10	1/100	1/1000
0 ,	*0*	*0*	*6*

$$\boxed{\frac{3}{500} = \frac{6}{1000} = 0{,}006}$$

Así, **los números decimales son la nueva forma de escribir los números racionales.** Se pueden leer de diversas formas:

0,5

- Cero coma cinco
- Cero con cinco
- Cinco décimas

2,6

- Dos coma seis
- Dos con seis
- Dos unidades y seis décimas
- Dos con seis décimas

3,25

- Tres coma veinticinco
- Tres con veinticinco
- Tres unidades y veinticinco centésimas
- Tres con veinticinco centésimas
- Tres unidades, dos décimas y cinco centésimas

– 0,28

- Menos cero coma veintiocho
- Menos cero con veintiocho
- Menos veintiocho centésimas

– 0,22

- Menos cero coma veintidós
- Menos cero con veintidós
- Menos veintidós centésimas
-

0,625

- Cero coma seiscientas veinticinco
- Cero con seiscientas veinticinco
- Seiscientas veinticinco milésimas
-

0,025

- Cero coma cero veinticinco
- Cero con cero veinticinco
- Veinticinco milésimas

2,305

- Dos coma trescientas cinco
- Dos con trescientos cinco
- Dos unidades con trescientas cinco milésimas
- Dos con trescientas cinco milésimas

0,006

- Cero coma cero, cero, seis
- Cero con cero, cero, seis
- Seis milésimas
-

Los números decimales se escriben:

- **En el sistema decimal.**
- **De izquierda a derecha**

Resolviendo así, las dos dificultades que presentaban los números racionales (ver apartado **1.-**)

El problema se nos plantea ahora con algunos números racionales que, por mucho que lo intentemos, no podemos pasarlos a fracción decimal:

Ejemplo:

$\frac{2}{3}$

No puedo pasarlo a fracción con denominador 10	$3 \cdot ? = 10$
Tampoco puedo pasarlo a denominador 100	$3 \cdot ? = 100$
No puedo pasarlo a denominador 1000	$3 \cdot ? = 1000$

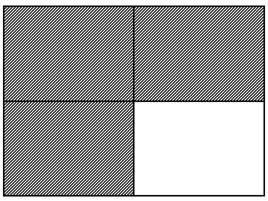
Para buscar la expresión decimal de estos números racionales, acudimos a una importante propiedad de los números racionales:

4.- IDENTIFICACIÓN ENTRE NÚMERO RACIONAL Y COCIENTE.

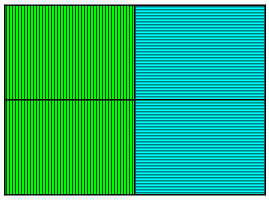
Un número racional se puede considerar como el resultado (cociente) al realizar la división entre el numerador y el denominador.

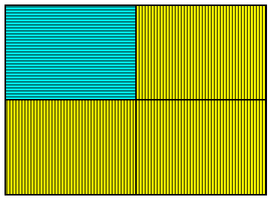
Ejemplo:

El número racional $\frac{3}{4}$ es:



Ahora vamos a dividir o repartir 3 unidades en 4 partes iguales:





A cada una de las partes le corresponden $\frac{3}{4}$ *de la unidad.*

Luego podemos escribir: $3 \div 4 = \frac{3}{4}$

(Tres dividido entre cuatro es igual a tres cuartos).

Esta es la razón por la que, muchas veces, al ver ¾ leemos "tres partido por cuatro" en lugar de "tres cuartos".

5.- EXPRESIÓN DECIMAL DE LAS FRACCIONES NO DECIMALES.

Para buscar la escritura decimal de las fracciones que no podían ser pasadas a fracción decimal, se divide el numerador por el denominador obteniendo cifras decimales en el cociente.

Ejemplo 1)

Buscar la expresión decimal del número racional 2/3:

1.- Realizo la división de 2 entre 3:

2	3

2.- Le corresponden 0 unidades a cada parte y sobran las dos unidades enteras.

2	3
	0

3.- ¿Qué hacemos con las dos unidades sobrantes?

Las convertimos en décimas.

Como cada unidad tiene diez décimas, tendremos 20 décimas.

20	3
	0

4.- Repartimos esas 20 décimas.

A cada parte le corresponden 6 décimas y sobran dos.

20	3
2	0,6

5.- ¿Qué hacemos con esas dos décimas que sobran?

Las convertimos en centésimas.

Como cada décima tiene diez centésimas, tendremos 20.

20	3
20	0,6

6.- Repartimos esas 20 centésimas.

A cada parte le corresponden 6 centésimas y sobran dos.

20	3
20	0,66
2	

7.- ¿Qué hacemos con esas 2 centésimas?

Las convertimos en milésimas.

Como cada centésima tiene diez milésimas, tendremos 20.

20	3
20	0,66
20	

8.- Repartimos esas 20 milésimas.

A cada parte le corresponden 6 milésimas y sobran 2.

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline \;\;20 & 0{,}666 \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;2 & \end{array}$$

9.- Como puedes observar, en el cociente se repite “infinitamente” la cifra 6.
Podemos escribir:

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666...$$

Pero existe un símbolo para indicar que el 6 se repite infinitamente.
Es una especie de “gorro” colocado encima de la cifra o de las cifras que se repiten, en este caso el 6:

$$\boxed{\frac{2}{3} = 0{,}\widehat{6}}$$

El decimal $0{,}\widehat{6}$ es un decimal periódico.

La cifra que se repite, en este caso el 6, es el **periodo**.

Ejemplo 2)
Buscar la expresión decimal del número racional 5/6:

1.- Realizamos la división hasta observar qué cifra o cifras se repite:

$$\begin{array}{l|l} 50 & 6 \\ \hline \;\;20 & 0{,}8333... \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;20 & \end{array}$$

2.- En este caso obtenemos 8 en la posición de las décimas y 3 en las siguientes posiciones.

3.- El periodo es, por tanto, el 3.

$$\boxed{\frac{5}{6} = 0{,}8\widehat{3}}$$

Ejemplo 3)
Buscar la expresión decimal del número racional 2/11

1.- Realizamos la división:

$$\begin{array}{l|l} 20 & 11 \\ \hline 090 & 0{,}18181... \\ \;\;020 & \\ \;\;\;\;090 & \end{array}$$

020
090

2.- En este caso observamos cómo el periodo está formado por dos cifras:

$$\boxed{\frac{2}{11} = 0{,}18}$$

6.- GENERALIZANDO

Podemos aprovechar esta identificación entre número racional y división para aplicarlo siempre que queramos pasar un número racional a decimal, sea el racional del tipo que sea. Así, dividiremos el numerador entre el denominador y, a veces, el resultado será un número decimal exacto:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{13}{5} = 2{,}6$$

Y, a veces, el resultado es un **decimal periódico**

$$\frac{2}{3} = 0{,}\overset{\frown}{6}$$

$$\frac{17}{7} = 2{,}428571$$

$$\frac{5}{6} = 0{,}8\overset{\frown}{3}$$

7.- TIPOS DE DECIMALES PERIÓDICOS.

7.1.- DECIMALES PERIÓDICOS PUROS.

Cuando el periodo comienza justo después de la coma. Es decir, no hay cifras decimales que no formen parte del periodo.

$0{,}\overset{\frown}{6}$

$0{,}18$

$2{,}428571$

7.2.- DECIMALES PERIÓDICOS MIXTOS.

Cuando el periodo no comienza justo después de la coma. Es decir, hay cifras decimales que no forman parte del periodo: **Anteperiodo**.

$0,8\widehat{3}$

$3,654\widehat{1}$

$278,7432$

8.- PROCESO INVERSO: BUSCAR LA EXPRESIÓN RACIONAL DE UN NÚMERO DECIMAL

Ahora vamos a tratar de encontrar la expresión racional de un número decimal. A este proceso se le suele denominar: **Buscar la fracción generatriz**, es decir, la fracción que genera, que crea, al decimal que me han dado.

8.1.- DECIMAL EXACTO

En este caso multiplicaremos al decimal por la unidad seguida de tantos ceros como sea necesario para **eliminar la coma**. El resultado obtenido lo colocaremos en el numerador. En el denominador colocaremos el número por el cual hemos multiplicado.
Sólo nos queda simplificar la fracción obtenida, si se puede.

Ejemplos:

$$1,25 = \frac{1,25 \cdot 100}{100} = \frac{125}{100} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

$$-0,2 = \frac{-0,2 \cdot 10}{10} = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$$

$$0,004 = \frac{0,004 \cdot 1000}{1000} = \frac{4}{1000} = \frac{2}{500} = \frac{1}{250}$$

8.2.- DECIMAL PERIÓDICO.

El proceso es mucho más complejo. La idea inicial es la misma: Intentar **eliminar la coma** para poder expresar el decimal como la división (fracción) entre dos números enteros.
El problema es que, como los decimales periódicos tienen infinitas cifras decimales, al multiplicar por la unidad seguida de ceros no voy a conseguir eliminar la coma.
La única forma de eliminar la coma es restándole al decimal periódico otro número que tenga exactamente la misma parte decimal.

8.2.1.- DECIMAL PERIÓDICO PURO

Ejemplo:

$1,\widehat{6}$

Lo resolveremos a través de un proceso algebraico:

Sea x la fracción que estoy buscando:

$x = 1,\overset{\frown}{6}$

Multiplicaremos a los dos miembros de la ecuación por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el periodo. En este caso, como el periodo tiene una cifra, multiplicaremos por 10:

$10x = 16.\overset{\frown}{6}$

Ahora colocaremos la primera ecuación debajo de la segunda y restaremos miembro a miembro:

$$\begin{array}{l} 10x = 16,\overset{\frown}{6} \\ \quad x = \ \ 1,\overset{\frown}{6} \\ \hline 9x = \ \ 15 \end{array} \qquad \text{(Los dos periodos, al restarse, se anulan completamente)}$$

Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{15}{9}$$

Y simplificamos, si se puede. En este caso, sí se puede.

$$x = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

Solución:

$$\boxed{1,\overset{\frown}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}}$$

(Podemos dividir 5 entre 3 para comprobar que sale bien).

Otro ejemplo:
Buscar la expresión racional del número decimal: 0,36.

Sea x la fracción que busco:

$x = 0,36$

En este caso multiplicaremos por 100 porque el periodo tiene dos cifras.

$100x = 36,36$

Ahora colocamos las dos ecuaciones, la una debajo de la otra, para restarlas:

$$100x = 36{,}36$$
$$x = 0{,}36$$

$$99x = 36$$

Y despejamos la incógnita:

$$x = \frac{36}{99} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}$$

Solución:

$$\boxed{0{,}36 = \frac{4}{11}}$$

8.2.2.- DECIMAL PERIÓDICO MIXTO.

En este caso multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como sea necesario para convertir el decimal periódico mixto en periódico puro. Procediendo después como en el caso anterior.

Ejemplo:

Buscar la expresión racional del decimal $0{,}8\widehat{2}$

$$x = 0{,}8\widehat{2}$$

Multiplicamos por 10 para convertir el decimal periódico mixto en puro:

$$10 \cdot x = 8{,}\widehat{2}$$

Ahora multiplicamos otra vez por diez para pasar el periodo a la parte entera:

$$10 \cdot 10 \cdot x = 82{,}\widehat{2}$$

Pero como $10 \cdot 10 = 100$

$$100 \cdot x = 82{,}\widehat{2}$$

Colocamos las dos ecuaciones con decimales periódicos puros para restar:

$$100 \cdot x = 82,\widehat{2}$$
$$10 \cdot x = 8,\widehat{2}$$
$$\overline{}$$
$$90 \cdot x = 74$$

Despejamos la x y simplificamos:

$$x = \frac{74}{90} = \frac{37}{45}$$

Solución:

$$\boxed{0,8\widehat{2} = \frac{37}{45}}$$

9.- DOS TIPOS DE NÚMEROS PARA UNA MISMA CANTIDAD.

Los números racionales y los números decimales sirven exactamente para representar las mismas cantidades.
¿Por qué contar con los dos sistemas?
Ya hemos comentado que las fracciones tenían dos inconvenientes (su escritura en vertical y que no están construidas en base decimal).
¿Por qué seguir, pues, empleando las fracciones?
Porque cuando las fracciones originan un decimal periódico, es más exacto el trabajo con fracciones que con los decimales.
Ejemplo:

$$6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2$$

$$6 \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot 0,\widehat{3} \approx 1,9998$$

10.- FRACCIONES QUE ORIGINAN DECIMALES EXACTOS.

Como $10 = 2 \cdot 5$, originarán fracciones decimales y, por tanto, decimales exactos todas aquellas fracciones que, una vez simplificadas, tengan por denominador un múltiplo exclusivo de 2 y de 5.

En el apartado 2.- se trabajaban diez fracciones que se podían pasar a fracción decimal y por tanto, a decimal exacto.
Se propone como ejercicio descomponer sus denominadores para comprobar que son múltiplos exclusivos de 2 y de 5

Ejemplo a) $\frac{1}{2}$ $\qquad 2 = 2$

Ejemplo b) $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ $\qquad 5 = 5$

Ejemplo c) $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ $\qquad 4 = 2^2$

Ejemplo d) $\frac{-7}{25}$ $\qquad 25 =$

Ejemplo e) $\frac{-11}{50}$ $\qquad 50 =$

Ejemplo f) $15\frac{11}{20} = \frac{311}{20}$ $\qquad 20 =$

Ejemplo g) $\frac{5}{8}$ $\qquad 8 =$

Ejemplo h) $\frac{1}{40}$ $\qquad 40 =$

Ejemplo i) $2\frac{61}{200} = \frac{461}{200}$ $\qquad 200 =$

Ejemplo j) $\frac{3}{500}$ $\qquad 500 =$

11.- FRACCIONES QUE GENERAN DECIMALES PERIÓDICOS.

Son todas las demás, es decir, aquellas que, una vez simplificadas, tienen por denominador un número que no es múltiplo exclusivo de 2 o/y de 5.

$\frac{\ }{3} \quad \frac{\ }{6} \quad \frac{\ }{7} \quad \frac{\ }{9} \quad \frac{\ }{11} \quad \frac{\ }{12} \quad \frac{\ }{13} \quad \frac{\ }{14} \quad \frac{\ }{15} \quad \frac{\ }{17} \quad \frac{\ }{18} \quad \ldots$

Se propone al alumno realizar las conversiones de los primeros números racionales a decimales para observar el comportamiento del periodo, deducir ciertas reglas, extraer conclusiones ...

$\frac{0}{3}=$	$\frac{0}{6}=$	$\frac{0}{7}=$	$\frac{0}{9}=$	$\frac{0}{11}=$	$\frac{0}{12}=$
$\frac{1}{3}=$	$\frac{1}{6}=$	$\frac{1}{7}=$	$\frac{1}{9}=$	$\frac{1}{11}=$	$\frac{1}{12}=$
$\frac{2}{3}=$	$\frac{2}{6}=$	$\frac{2}{7}=$	$\frac{2}{9}=$	$\frac{2}{11}=$	$\frac{2}{12}=$
$\frac{3}{3}=$	$\frac{3}{6}=$	$\frac{3}{7}=$	$\frac{3}{9}=$	$\frac{3}{11}=$	$\frac{3}{12}=$
$\frac{4}{3}=$	$\frac{4}{6}=$	$\frac{4}{7}=$	$\frac{4}{9}=$	$\frac{4}{11}=$	$\frac{4}{12}=$
$\frac{5}{3}=$	$\frac{5}{6}=$	$\frac{5}{7}=$	$\frac{5}{9}=$	$\frac{5}{11}=$	$\frac{5}{12}=$
$\frac{6}{3}=$	$\frac{6}{6}=$	$\frac{6}{7}=$	$\frac{6}{9}=$	$\frac{6}{11}=$	$\frac{6}{12}=$
$\frac{7}{3}=$	$\frac{7}{6}=$	$\frac{7}{7}=$	$\frac{7}{9}=$	$\frac{7}{11}=$	$\frac{7}{12}=$
$\frac{8}{3}=$	$\frac{8}{6}=$	$\frac{8}{7}=$	$\frac{8}{9}=$	$\frac{8}{11}=$	$\frac{8}{12}=$
$\frac{9}{3}=$	$\frac{9}{6}=$	$\frac{9}{7}=$	$\frac{9}{9}=$	$\frac{9}{11}=$	$\frac{9}{12}=$
$\frac{10}{3}=$	$\frac{10}{6}=$	$\frac{10}{7}=$	$\frac{10}{9}=$	$\frac{10}{11}=$	$\frac{10}{12}=$
$\frac{11}{3}=$	$\frac{11}{6}=$	$\frac{11}{7}=$	$\frac{11}{9}=$	$\frac{11}{11}=$	$\frac{11}{12}=$
$\frac{12}{3}=$	$\frac{12}{6}=$	$\frac{12}{7}=$	$\frac{12}{9}=$	$\frac{12}{11}=$	$\frac{12}{12}=$

12.- ¿NÚMEROS DECIMALES O NÚMEROS RACIONALES?

Como ya se ha dicho, ambos números tienen sus ventajas e inconvenientes.
El utilizar un sistema u otro depende de:

1.- La costumbre social:
- Decimos "*Deme ¾ de gambas*" y no "*deme 0,75 de gambas*"
- Decimos: "*El interés del préstamo es de 10,62%*" y no "*el interés del préstamo es 531/50%"*

2.- La perfección que deseemos al realizar los cálculos: Si deseamos mucha exactitud, emplearemos las fracciones, en lugar de los decimales periódicos.

3.- De la facilidad del cálculo: A veces es más fácil operar con unos números que con otros. Por ejemplo, es más fácil multiplicar por 4 que dividir por 0,25 (siendo el resultado el mismo, ¡compruébalo!).

13.- OPERACIONES CON LOS NÚMEROS DECIMALES.

13.1.- SUMA

Para sumar números decimales colocaremos la coma debajo de la coma y sumaremos como si fuesen números naturales colocando la coma en el resultado debajo de las comas de los sumandos.

a)

$0{,}25 + 3{,}5 = 3{,}75$

$$\begin{array}{r} 0{,}25 \\ +\ 3{,}5 \\ \hline 3{,}75 \end{array}$$

$$\boxed{0{,}25 + 3{,}5 = \frac{1}{4} + \frac{7}{2} = \frac{1}{4} + \frac{14}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} = 3{,}75}$$

b)

$$\begin{array}{r} 4\phantom{{,}0000} \\ +\ 1{,}35 \\ 0{,}0002 \\ \hline 5{,}3502 \end{array}$$

$4 + 1{,}35 + 0{,}0002 = 5{,}3502$

$$\boxed{4 + 1{,}35 + 0{,}0002 = \frac{4}{1} + \frac{27}{20} + \frac{2}{10000} = \frac{40000}{10000} + \frac{13500}{10000} + \frac{2}{10000} = \frac{53502}{10000} = \frac{26751}{5000} = 5\frac{1751}{5000} = 5{,}3502}$$

c)

$$\begin{array}{r} 6{,}3333 \\ +\ 1{,}5888 \\ \hline 7{,}9221 \end{array}$$

$6,\widehat{3} + 1,5\widehat{8} \approx 7,9221$

$$\boxed{6,\widehat{3} + 1,5\widehat{8} = \frac{57}{9} + \frac{143}{90} = \frac{570}{90} + \frac{143}{90} = \frac{713}{90} = 7\frac{83}{90} = 7,9\widehat{2}}$$

Compara los resultados de esta suma realizada a través de números decimales o a través de números racionales.

13.2.- RESTA

Se debe tener la misma consideración que al realizar la suma: Colocar la doma debajo de la coma rellenando con ceros cuando no haya cifras decimales.

a)

$25 - 1,75 = 23,25$

$$\begin{array}{r} 25,00 \\ -\ \ 1,75 \\ \hline 23,25 \end{array}$$

$$\boxed{25 - 1,75 = \frac{25}{1} - \frac{7}{4} = \frac{100}{4} - \frac{7}{4} = \frac{100}{4} + \frac{-7}{4} = \frac{93}{4} = 23\frac{1}{4} = 23,25}$$

b)

$1,5 - 6,25 = -4,75$

$$\begin{array}{r} 6,25 \\ -\ 1,50 \\ \hline 4,75 \end{array}$$

$$\boxed{1,5 - 6,25 = \frac{3}{2} - \frac{25}{4} = \frac{6}{4} - \frac{25}{4} = \frac{6}{4} + \frac{-25}{4} = \frac{-19}{4} = -4\frac{3}{4} = -4,75}$$

c)

$0,\widehat{3} - 1,25 \approx -0,9167$

$$\begin{array}{r} 1,2500 \\ -\ 0,3333 \\ 0,9167 \end{array}$$

$$\boxed{0,\widehat{3} - 1,25 = \frac{1}{3} - \frac{5}{4} = \frac{4}{12} + \frac{-15}{12} = \frac{-11}{12} = -0,91\widehat{6}}$$

Compara el resultado de la operación hecha con decimales y con racionales

13.3.- PRODUCTO

Para multiplicar dos números decimales procederemos como si no hubiese comas, separando en el resultado tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.

a)

$0{,}5 \cdot 64 = 32$

$$\boxed{0{,}5 \cdot 64 = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{1} = \frac{64}{2} = 32}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \underline{0{,}5} \\ 32{,}0 \end{array}$$

b)

$-1{,}25 \cdot 0{,}125 = -0{,}15625$

$$\boxed{-1{,}25 \cdot 0{,}125 = \frac{-5}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{-5}{32} = -0{,}15625}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}125 \\ \underline{1{,}25} \\ 625 \\ 250 \\ \underline{125} \\ 0{,}15625 \end{array}$$

c)

$-1{,}\widehat{3} \cdot (-9) \approx 11{,}997$

$$\boxed{-1{,}\widehat{3} \cdot (-9) = \frac{-4}{3} \cdot \frac{-9}{1} = \frac{36}{3} = 12}$$

$$\begin{array}{r} 1{,}333 \\ \underline{9} \\ 11{,}997 \end{array}$$

Compara ambos resultados

13.4.- COCIENTE.

13.4.1.- División entre números enteros con resultado decimal.

Este tipo de divisiones ya se han realizado en el apartado **5.-**

Se resuelve la división de números enteros hasta llegar al último resto parcial entero. En ese momento se añade un cero al resto, en el cociente se coloca una coma y se divide obteniendo un nuevo resto parcial (ya en décimas). Se añade otro cero al nuevo resto parcial y se vuelve a dividir, repitiendo este proceso tantas veces como haga falta hasta que el resto parcial se haga cero o hasta obtener un decimal periódico en el cociente.

$8 \div 6 = 1,\widehat{3}$

$$\boxed{8 \div 6 = \frac{8}{6} = 1\frac{2}{6} = 1,\widehat{3}}$$

8	6
20	1,33...
20	
20	

13.4.2.- División entre un decimal y un entero.

Se empieza a resolver como si no hubiese coma y, justo después de bajar la primera cifra decimal en el resto parcial, se coloca una coma en el cociente añadiendo ceros en los restos parciales hasta que se hagan cero u obtengamos un decimal periódico.

$-63,5 \div 2 = -31,75$

$$\boxed{-6,35 \div 2 = \frac{-127}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{-127}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-127}{4} = -31,75}$$

63,5	2
03	31,75
15	
10	
0	

Si el decimal es periódico se hace una aproximación colocando unas cuantas cifras decimales. El resultado será, también, una aproximación. El resultado exacto se obtendrá al efectuar la operación con números racionales.

$2,\widehat{4} \div 6 \approx 0,407$

$$\boxed{2,\widehat{4} \div 6 = \frac{22}{9} \div \frac{6}{1} = \frac{22}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{22}{54} = \frac{11}{27} = 0,407}$$

2,444	6
044	0,407
2	

Observa que, aunque las tres primeras cifras decimales coinciden, no así lo hacen las demás. En el caso de la aproximación, se han dejado dos milésimas en el resto. Si se hubiera seguido trabajando, hubiera generado un 3 periódico. En el caso de la división por medio de racionales, se ha creado un periodo de tres cifras.

13.4.3.- División entre un número entero y otro decimal.

En este caso se multiplica al dividendo y al divisor por la unidad seguida de tantos ceros como haga falta para eliminar la coma en el divisor. A partir de este momento, se resuelve como en el caso **13.4.1.-** (división entre números enteros con posible resultado decimal).

$6 \div 1{,}25 = 4{,}8$

6	$\lfloor$1,25
600	$\lfloor$125
1000	4,8
000	

$$6 \div 1{,}25 = \frac{6}{1} \div \frac{5}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} = 4{,}8$$

En el caso de que el decimal por el que vayamos a dividir sea periódico, se realiza una aproximación colocando un determinado número de cifras decimales y despreciando el resto. El cálculo exacto vendrá al operar con fracciones.

$126 \div 1{,}1\overset{\frown}{6} \approx 108{,}07$

126	$\lfloor$1,166
126000	$\lfloor$1166
009400	108,07
007200	
0038	

$$126 \div 1{,}1\overset{\frown}{6} = \frac{116}{1} \div \frac{7}{6} = \frac{116}{1} \cdot \frac{6}{7} = \frac{756}{7} = 108$$

13.4.4.- División entre dos números decimales.

Si los dos decimales son exactos se igualan en números de cifras decimales añadiendo los ceros que sean necesarios en el dividendo o en el divisor. En este momento se elimina la coma (es como si hubiésemos multiplicado a los dos términos de la división por el mismo número), procediendo como en el caso **13.4.1.-** (división de números enteros).

$1{,}25 \div 0{,}5 = 2{,}5$

1,25	$\lfloor$0,50
125	$\lfloor$50
250	2,5
00	

$$1{,}25 \div 0{,}5 = \frac{5}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} = 2{,}5$$

En el caso de que alguno de los términos, o los dos, sean decimales periódicos se hace la aproximación correspondiente.

$0{,}1\overset{\frown}{6} \div 0{,}18 \approx 0{,}9163$

$$\boxed{0{,}1\overset{\frown}{6} \div 0{,}18 = \frac{1}{6} \div \frac{2}{11} = \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{2} = \frac{11}{12} = 0{,}91\overset{\frown}{6}}$$

0,1666	0,1818
16660	1818
2980	0,916
11620	
0712	

13.5.- POTENCIACIÓN

Para realizar una potencia cuya base es un número decimal y cuyo exponente es un número natural se opera de acuerdo con la definición inicial de potencia, teniendo en cuenta los casos especiales de potencias de exponente 1 y 0

$(-2{,}5)^0 = 1$

$(0{,}725)^1 = 0{,}725$

$(-1{,}4)^2 = (-1{,}4) \cdot (-1{,}4) = 1{,}96$

$(0{,}3)^3 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}027$

Cuando el decimal es periódico tenemos que resolverlo por aproximación, salvo en los casos de los exponentes 1 y 0 cuya solución es exacta.
Para evitar la aproximación en todos los demás casos habrá que recurrir a las fracciones.

$(1{,}\overset{\frown}{7})^0 = 1$

$(-2{,}\overset{\frown}{3})^1 = -2{,}\overset{\frown}{3}$

$(0{,}\overset{\frown}{6})^2 \approx 0{,}666 \cdot 0{,}666 = 0{,}443556$

$$\boxed{(0{,}\overset{\frown}{6})^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} = 0{,}\overset{\frown}{4}}$$

Cuando el exponente es un número decimal, se coloca en forma de fracción y se resuelve la raíz a la que da origen. (Ver unidad **4** apartado **20.3.-** página 129)

$$(0{,}4)^{1{,}5} = (0{,}4)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{(0{,}4)^3} = \sqrt[2]{0{,}064} \approx 0{,}253$$

13.6.- RADICACIÓN

Las raíces más utilizadas son las de índice 2 –raíces cuadradas- con mucha diferencia sobre las demás, un poco las de índice 3 –raíces cúbicas- y muy poco las raíces de otros índices.
Hay raíces de números decimales cuyo resultado es exacto (decimal exacto o periódico):

$$\sqrt[2]{0{,}25} = \pm 0{,}5$$

$$\boxed{\sqrt[2]{0{,}25} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2} = \pm 0{,}5}$$

$$\sqrt[3]{0{,}296} = 0{,}\widehat{6}$$

$$\boxed{\sqrt[3]{0{,}296} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} = 0{,}\widehat{6}}$$

Cuando el resultado no sale exacto "a la primera", entonces ya no va a haber ningún número decimal (exacto o periódico) que sea la respuesta a esa operación. Si no hay solución decimal tampoco hay solución racional porque ya hemos insistido que números racionales y decimales son dos formas de escribir una misma cantidad.
Por lo tanto, las raíces no exactas dan origen a unos nuevos números que se conocen con el nombre de **IRRACIONALES**. (Los números racionales junto con los irracionales forman los **NÚMEROS REALES**).
Son números reales irracionales:

$$\sqrt[2]{2} \approx 1{,}4142136$$

$$\sqrt[2]{3} \approx 1{,}7320508$$

$$\sqrt[2]{5} \approx 2{,}236068$$

...

Así como alguno otro que ya conoces como el número π cuyo valor no es un decimal exacto y tampoco un decimal periódico (las cifras decimales no se repiten periódicamente).
Se suelen hacer dos aproximaciones, dependiendo del grado de exactitud que busquemos:
$\pi \approx 3{,}14$ o bien:

$\pi \approx 3{,}1416$

Puedes comprobar las cifras decimales que aparecen en tu calculadora y escribirlas aquí:

$\pi \approx$

(es, de nuevo, una aproximación a su valor).

El estudio de estos números es objeto de cursos posteriores.

PRUEBA DE EVALUACIÓN UNIDAD 5

Alumno/a: ____ Fecha: ___________

Resuelve las siguiente operaciones con números fraccionarios y con decimales, aprovechando los resultados para escribir la solución exacta.

NÚMEROS RACIONALES	NÚMEROS DECIMALES
$\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=$	
$\frac{-5}{4}-\frac{-1}{8}=$	
$\frac{3}{5}\cdot 10=$	
$\frac{3}{4}\div 8=$	
$\left(\frac{-2}{3}\right)^2=$	
$\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=$	
	$-0,\widehat{6}+0,8\widehat{3}=$
	$0,142857\ -1,\widehat{6}=$

ORIENTACIONES GENERALES

1.- INTRODUCCIÓN.

Los números decimales se presentan como una nueva forma de escribir los racionales. El paso de número fraccionario a decimal debe hacerse pasando por la fracción decimal equivalente. Para ello se eligen las fracciones con denominador adecuado (múltiplos exclusivos de 2 y/o de 5).
Sólo una vez encontrado por este sistema la expresión decimal de los fraccionarios propuestos, debe darse el paso con el resto de los fraccionarios, es decir, aquellos que no pueden ser pasados a fracción decimal.

2.- NÚMERO FRACCIONARIO Y COCIENTE ENTRE LOS TÉRMINOS DE LA FRACCIÓN.

Trabajamos esa identificación que ya se apuntaba en la unidad anterior.
Además se realiza el algoritmo de la división sacando decimales y razonando el proceso (la gran mayoría de los alumnos deben controlar este tipo de divisiones).
Una vez visto este proceso se plantea este método como el único posible para buscar la expresión decimal de los números fraccionarios que no tienen fracción decimal equivalente.
Posteriormente se generaliza el método para todos los números fraccionarios.

3.- DE DECIMAL PERIÓDICO A FRACCIÓN.

El método que se propone es el más útil desde el punto de vista matemático, (se adelantan conceptos y procedimientos algebraicos que se trabajarán más adelante).
El método tradicional no se ve porque no tiene ningún interés didáctico. Solamente convendrá hablar de él si algún alumno lo conoce y recuerda.

4.- EXACTITUD Y APROXIMACIÓN.

Los números decimales periódicos son un buen argumento para trabajar el concepto de precisión y aproximación. En la Unidad se ven varios ejemplos. No está de más trabajar con los alumnos ejemplos de la vida cotidiana que requieran gran precisión en los cálculos y otros en que no, para ver la necesidad o no de trabajar con decimales periódicos o con sus fracciones equivalentes.

5.- PASAR LOS PRIMEROS NÚMEROS FRACCIONARIOS A DECIMALES.

El ejercicio propuesto en la unidad (apartado **11.-** página 162),es muy interesante. Se puede hacer con calculadora. El alumno debe preocuparse únicamente de escribir correctamente el resultado de la pantalla.
A este respecto señalar el posible uso de aproximaciones al presentar los datos en la pantalla que algunas calculadoras harán con aquellos decimales periódicos cuyo periodo sea superior a 5.

> Por ejemplo: Al pasar 7/6 a decimal, la calculadora puede presentar el decimal: 1,1666667
> El alumno debe conocer que lo que hace la calculadora es presentar esa aproximación al ser la cifra 6 mayor que la cifra central, es decir, 5.

No todas las calculadoras hacen estas aproximaciones. Ver cuáles de las que hay en la clase lo hacen y cuáles no. Independientemente de las aproximaciones, el alumno debe saber ver el resultado exacto.

6.- OPERACIONES CON DECIMALES.

No tienen mayor misterio. El interés de esta parte de la unidad está en ver cómo las operaciones se pueden hacer con los dos sistemas y esto, cuando los números son periódicos, provoca pequeñas diferencias en los resultados.

SOLUCIONES

Actividades propuestas en la página 16:

$25 = 5^2$

$50 = 2 \cdot 5^2$

$20 = 2^2 \cdot 5$

$8 = 2^3$

$40 = 2^3 \cdot 5$

$200 = 2^3 \cdot 5^2$

$500 = 2^2 \cdot 5^3$

$\frac{0}{3}=0$	$\frac{0}{6}=0$	$\frac{0}{7}=0$	$\frac{0}{9}=0$	$\frac{0}{11}=0$	$\frac{0}{12}=0$
$\frac{1}{3}=0,\widehat{3}$	$\frac{1}{6}=0,1\widehat{6}$	$\frac{1}{7}=0,142857$	$\frac{1}{9}=0,\widehat{1}$	$\frac{1}{11}=0,09$	$\frac{1}{12}=0,08\widehat{3}$
$\frac{2}{3}=0,\widehat{6}$	$\frac{2}{6}=0,\widehat{3}$	$\frac{2}{7}=0,285714$	$\frac{2}{9}=0,\widehat{2}$	$\frac{2}{11}=0,18$	$\frac{2}{12}=0,1\widehat{6}$
$\frac{3}{3}=1$	$\frac{3}{6}=0,5$	$\frac{3}{7}=0,428571$	$\frac{3}{9}=0,\widehat{3}$	$\frac{3}{11}=0,27$	$\frac{3}{12}=0,25$
$\frac{4}{3}=1,\widehat{3}$	$\frac{4}{6}=0,\widehat{6}$	$\frac{4}{7}=0,571428$	$\frac{4}{9}=0,\widehat{4}$	$\frac{4}{11}=0,36$	$\frac{4}{12}=0,\widehat{3}$
$\frac{5}{3}=1,\widehat{6}$	$\frac{5}{6}=0,8\widehat{3}$	$\frac{5}{7}=0,714285$	$\frac{5}{9}=0,\widehat{5}$	$\frac{5}{11}=0,45$	$\frac{5}{12}=0,41\widehat{6}$
$\frac{6}{3}=2$	$\frac{6}{6}=1$	$\frac{6}{7}=0,857142$	$\frac{6}{9}=0,\widehat{6}$	$\frac{6}{11}=0,54$	$\frac{6}{12}=0,5$
$\frac{7}{3}=2,\widehat{3}$	$\frac{7}{6}=1,1\widehat{6}$	$\frac{7}{7}=1$	$\frac{7}{9}=0,\widehat{7}$	$\frac{7}{11}=0,63$	$\frac{7}{12}=0,58\widehat{3}$
$\frac{8}{3}=2,\widehat{6}$	$\frac{8}{6}=1,\widehat{3}$	$\frac{8}{7}=1,142857$	$\frac{8}{9}=0,\widehat{8}$	$\frac{8}{11}=0,72$	$\frac{8}{12}=0,\widehat{6}$
$\frac{9}{3}=3$	$\frac{9}{6}=1,5$	$\frac{9}{7}=1,285714$	$\frac{9}{9}=1$	$\frac{9}{11}=0,81$	$\frac{9}{12}=0,75$
$\frac{10}{3}=3,\widehat{3}$	$\frac{10}{6}=1,\widehat{6}$	$\frac{10}{7}=1,428571$	$\frac{10}{9}=1,\widehat{1}$	$\frac{10}{11}=0,90$	$\frac{10}{12}=0,8\widehat{3}$
$\frac{11}{3}=3,\widehat{6}$	$\frac{11}{6}=1,8\widehat{3}$	$\frac{11}{7}=1,571428$	$\frac{11}{9}=1,\widehat{2}$	$\frac{11}{11}=1$	$\frac{11}{12}=0,91\widehat{6}$
$\frac{12}{3}=4$	$\frac{12}{6}=2$	$\frac{12}{7}=1,714285$	$\frac{12}{9}=1,\widehat{3}$	$\frac{12}{11}=1,09$	$\frac{12}{12}=1$

NÚMEROS RACIONALES	NÚMEROS DECIMALES
$\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}=2$	$1,\widehat{6}+0,\widehat{3}=2$
$\frac{-5}{4}-\frac{-1}{8}=\frac{-10}{8}+\frac{1}{8}=\frac{-9}{8}=-1\frac{1}{8}$	$-1,25-(-0,125)=-1,25+0,125=-1,125$
$\frac{3}{5}\cdot 10=\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{1}=\frac{30}{5}=6$	$0,6\cdot 10=6$
$\frac{3}{4}\div 8=\frac{3}{4}\div\frac{8}{1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{32}$	$0,75\div 8=0,09375$
$\left(\frac{-2}{3}\right)^2=\frac{-2}{3}\cdot\frac{-2}{3}=\frac{4}{9}$	$(-0,\widehat{6})^2=(-0,\widehat{6})\cdot(-0,\widehat{6})=0,\widehat{4}$
$\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{0,037}=0,\widehat{3}$
$\frac{-2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{-4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$	$-0,\widehat{6}+0,8\widehat{3}=0,1\widehat{6}$
$\frac{1}{7}-\frac{5}{3}=\frac{3}{21}+\frac{-35}{21}=\frac{-32}{21}-1\frac{11}{21}$	$0,142857-1,\widehat{6}=-1,523809$

UNIDAD 5 **SOLUCIONES CONTROL DE CONOCIMIENTOS PREVIOS**

1.- ¿ Sabes lo que significan los datos de la pantalla de esta calculadora ?
Es la forma que tiene la calculadora de escribir

$$\boxed{\frac{13}{5}}$$

¿ Y los datos de esta otra ?
Es la forma de simplificar la fracción anterior:

$$\boxed{\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}}$$

2.- ¿ Sabes cómo se puede escribir $\frac{1}{2}$ de forma no fraccionaria ?

0,5

3.- ¿ Qué número es mayor: **1,5** ó **1,125** ?
1,5

4.- ¿ Te suenan de algo los **decimales periódicos** ?
Son aquellos números cuyas cifras decimales se repiten infinitamente

5.- En la pantalla de una calculadora aparece:
Al **multiplicar** a esa cantidad por **3** ¿ qué crees que va a salir ?
Puede salir 3,9999999 o también: 4

6.- ¿ Sabrías hacer "de cabeza" ?:
$8 \div 0{,}25 =$
0,25 es equivalente a ¼
Y dividir equivale a multiplicar por el inverso
El inverso de ¼ es 4
8 ÷ 0,25 = 8 · 4 = 32

7.- ¿ Por qué número habría que **multiplicar** al 10 para que saliera 5 ?
Por 0,5

8.- ¿ Sabes que diferencia hay entre **décima** y **decena** ?
Diez décimas completan una unidad
Diez unidades completan una decena

9.- ¿ Conoces algún **número decimal** que sea exactamente igual a un **número natural** ?

$$\boxed{1{,}\widehat{9} = 2}$$

10.- ¿ Por qué número habría que **dividir** a 4 para que saliera 8 ?

Por 0,5

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

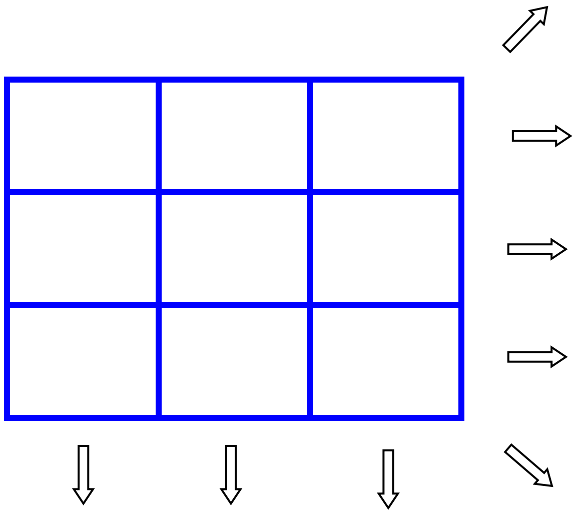
5 Actividades de Estrategia

18
19
20
21
22
23

ACTIVIDAD Nº 1

CUADRADO MÁGICO

Coloca las cifras del 1 al 9 en cada una de las casillas de manera que sumen 15 en horizontal, en vertical y en diagonal.



Lógicamente como hay 9 casillas, cada número ocupa una casilla. No se pueden repetir los números y todos los números deben ser usados.

CUADRADO MÁGICO 2

Una vez obtenida tu solución, vamos a intentar hallar todas las soluciones posibles:

Coloca tu solución en este cuadro:
1.-

Gira 90º la solución anterior:
2.-

Gira 90º la solución anterior:
3.-

Gira 90º la solución anterior:
4.-

Escribe aquí la simetría de la 1.-
5.-

Escribe aquí la simetría de la 2.-
6.-

Escribe aquí la simetría de la 3.-
7.-

Escribe aquí la simetría de la 4.-
8.-

Comprueba con tus compañeros que ya no hay más soluciones.

CUADRADO MÁGICO 3

Escribe aquí las 9 cifras que has empleado en el cuadrado anterior:

¿Qué observas?

1.- ¿Quién ocupa la posición central?
2.- ¿Cuánto suman los dos extremos?
3.- ¿Cuánto suman el segundo y el penúltimo?
4.- ¿Y el tercero y el antepenúltimo?
5.- ¿Y el tercero y el séptimo?
6.- ¿Y el cuarto y el sexto?

Te proponemos ahora otro cuadrado mágico.
Esta vez vas a colocar los nueve primeros números pares empezando por el 0.
O sea, tienes que colocar el 0 , el 2 , el 4 , el 6 , el 8 , el 10 , el 12 , el 14 y el 16.
¿ Cuánto sumarán ahora?

¿Cómo podríamos resolverlo aprovechando la solución anterior?

¿Qué otros números podríamos proponer para colocar?
¿Cuánto sumarían?

Si ya conoces los números negativos, se podría proponer colocar del –4 al 4:
–4 , –3 , –2 , –1 , 0 , 1 , 2 , 3 , y 4

¿Cuánto sumarían las filas y columnas?
Escribe aquí una solución:

ACTIVIDAD Nº 2

CRIPTOGRAMA Nº 1

Sustituye cada una de las letras por una cifra de tal manera que la suma funcione bien.

			0	N	C	E
+		N	U	E	V	E
	V	E	I	N	T	E

Se cumple también que la suma de los valores de las cifras de la palabra “VEINTE” suman 20:

$\boxed{V + E + I + N + T + E = 20}$

Lógicamente una letra concreta tiene el mismo valor en todas las posiciones en las que aparezca.
Dos letras distintas tienen que tener valores distintos.

CRIPTOGRAMA Nº 1

PROCESO LÓGICO PARA SU SOLUCIÓN

Vamos a intentar seguir un proceso ordenado y lógico para resolver el criptograma y, de paso, ver todas las soluciones posibles, en el caso de que haya más de una.

1º.-

E + E = E

O bien,

E + E = E + 10

¿Qué única cifra cumple la primera (la segunda es imposible) condición?

Supongo que ya has averiguado que

E =

2º.- ¿Qué valor puede tener V?

Lógicamente es “la que nos llevamos” después de sumar la columna anterior. ¿Cuánto “nos podemos llevar” como máximo en una suma de dos sumandos?
Los sumandos anteriores, éste no es el caso, como máximo pueden ser 9. Así 9 + 9 = __
Luego nos llevaríamos ___ y ya sabemos que

V =

3º.-

Evidentemente éste no era el caso porque en la columna anterior sólo había un sumando, la N; luego como hemos visto que como máximo en una suma de dos sumandos nos podemos llevar ___ y al añadírsela a N nos llevamos una a la columna siguiente ... El único valor posible de N es ____. Así:

N =

4º.-

Ahora sustituye estas tres letras por sus valores:

		0	N	C	E
+	**N**	U	**E**	V	**E**
V	**E**	I	**N**	T	**E**

Veamos lo que tenemos ahora:

$\boxed{C}$ + $\boxed{}$ = $\boxed{T}$
Porque no nos llevamos ninguna.

$\boxed{O}$ + $\boxed{U}$ = $\boxed{I}$ + 10
Porque nos llevamos una

$\boxed{I}$ + $\boxed{T}$ =
Porque ___ + ___ + I + ___ + T + ___ = 20

Ahora tacha las cifras que ya hemos empleado:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Y vemos las que disponemos para las letras: C , T , O , U e I

5º.-
Ahora con las cifras libres hacemos las suposiciones:

<u>1ª suposición:</u>
La I vale ___ por lo tanto la T vale ___ y la C vale ___
Cifras libres:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como O + U será ___. Vemos que con las cifras libres no se puede conseguir.

<u>2ª suposición:</u>
La I vale ___ por lo tanto la T vale ___ y la C vale ___
Cifras libres:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como O + U será ___. La O puede valer ____ y la U ____
Y obtenemos las primera solución: $\boxed{\mathbf{O} = }$ $\boxed{\mathbf{U} = }$

Pero también puede ser al revés: $\boxed{\mathbf{O} = }$ $\boxed{\mathbf{U} = }$

La suposición ha funcionado y nos ha proporcionado dos soluciones cuando:

$\boxed{\mathbf{I} = }$ $\boxed{\mathbf{T} = }$ $\boxed{\mathbf{C} = }$

Ya habríamos acabado pero continuamos por si encontramos alguna otra solución.

<u>3ª suposición.</u>

La I vale ___ por tanto la T vale ___ y la C vale ___
Cifras libres:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como O + U será ___ Vemos que con las cifras libres no tenemos ninguna posibilidad.

4ª suposición.

I = ___ y entonces la T vale ___ ¡IMPOSIBLE!

5ª suposición.

I = ___ y por tanto la T vale ____ y la C vale ___

Cifras libres:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como O + U sería ___. Con las cifras libres esto no se puede conseguir.

6ª suposición.

I = ___ y por tanto T = ___ y C = ___

Cifras libres:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como O + U sería ___ Con las cifras libres esto no se puede conseguir.

7ª suposición.

I = ____ y por tanto T = ___ y C = ___ ¡IMPOSIBLE!

¡Esta cifra ya está empleada!

FIN

Conclusión:

Hemos obtenido dos soluciones:

PRIMERA SOLUCIÓN

			0	N	C	E
+		N	U	E	V	E
	V	E	I	N	T	E

SEGUNDA

			0	N	C	E
+		N	U	E	V	E
	V	E	I	N	T	E

OTROS CRIPTOGRAMAS

Si te ha gustado la actividad anterior puedes atreverte con estos otros dos criptogramas. De paso practicas un poco el inglés.
El primero es el mensaje que un hijo, viviendo lejos de su casa, le manda como despedida en una carta a su madre:

		S	E	N	D
+		M	O	R	E
	M	O	N	E	Y

El segundo es la respuesta de su madre:

	S	P	E	N	D
+		L	E	S	S
	M	O	N	E	Y

Lógicamente son dos criptogramas distintos. Los valores de las letras del primero no tienen nada que ver con las del segundo.

ACTIVIDAD Nº 3

UN PROBLEMA DE VASOS Y AGUA

Se tienen dos vasijas. La primera, cuando está llena, contiene 9 litros y la segunda, también cuando está llena, contiene 4 litros.
Queremos medir exactamente 1 litro.
¿Cómo lo podemos hacer?

Cuando lo hayas conseguido comenta tu solución con la de tus compañeros y comprobar quién ha conseguido el resultado de forma más sencilla.

SEGUIMOS CON EL AGUA

Ahora queremos medir 1 l., 2 l., 3 l., 4 l., ... hasta 13 litros que es lo máximo que se puede conseguir teniendo las dos vasijas llenas.

Vamos a ayudarte a representar ordenadamente tus movimientos:

	Vasija de 9 l.	Vasija de 4 l.	Consigo medir..
Al principio las dos vasijas están vacías	0	0	
Lleno la vasija grande	9	0	**9**
Con la grande lleno la pequeña	5	4	**5 4**
Tiro el contenido de la pequeña	5	0	
Con la grande lleno la pequeña	1	4	**1**

Contrasta tu solución con la de tus compañeros y comprueba quién lo ha conseguido con un menor número de movimientos.

Si te ha gustado el problema:

Ahora las dos vasijas miden 10 y 7 litros respectivamente. Se trata de conseguir medir desde 1 litro a 17. ¿Es posible?

ACTIVIDAD Nº 4

UN PROBLEMA DE CUATROS

En una ciudad de cuatro casas vivían cuatro matemáticos que cada cuatro días se reunían los cuatro, durante cuatro horas, en torno a una mesa de cuatro patas para resolver problemas sobre cuatros.
Este fue el problema planteado en la última reunión: **Utilizando 4 cuatros y las cuatro operaciones elementales, debes obtener todas las cifras significativas**.
A pesar de que caían cuatro gotas y de que el primer matemático tuviese sólo cuatro pelos en la cabeza y llevase boina para no mojarse, no tardó más de cuatro segundos en resolver este curioso problema.
¿Serías tú también capaz?

Nota: Deben emplearse para cada cifra **cuatro** cuatros (no vale tres, ni dos,...) y alguna de las cuatro operaciones.

Ejemplo:
Para obtener la primera cifra, el 0:

$\boxed{44 - 44 = 0}$

AHORA, UN PROBLEMAS DE TRESES

Cuando hayas conseguido resolver el problema de los cuatro cuatros quizá con la ayuda de tus compañeros, te planteamos el mismo problema: Conseguir las diez cifras significativas pero esta vez empleando cuatro treses.
Procura rentabilizar el esfuerzo que has hecho en el problema anterior.

¿Y CON CUATRO CINCOS?

¿Se puede conseguir también con cuatro cincos?
¡Adelante!

ACTIVIDAD Nº 5

CUESTIÓN DE ORDEN

El mazo de las 40 cartas de la baraja española vueltas boca abajo.

Se coge la primera carta que estaba boca abajo. Se levanta. Es el as de oros. Se deja aparte.

La segunda carta del mazo se coloca, sin mirarla, debajo del todo el mazo.

Se coge la tercera carta del mazo. Se levanta. Es el dos de oros. Se coloca encima del as.

La siguiente carta del mazo se coloca, sin mirar, debajo de todo el mazo.

Se coge la siguiente carta del mazo. Se levanta. Es el tres de oros. Se coloca encima del dos.

La siguiente carta del mazo se coloca, sin mirar, debajo de todo el mazo.

Y así sucesivamente.
Levantando una carta y colocando debajo del mazo la carta siguiente se va deshaciendo el mazo saliendo todas las cartas de forma ordenada. Primero las 10 cartas de un palo, luego las diez cartas de otro palo, luego las del tercer palo y, finalmente, las diez cartas del último palo.

El problema consiste en ser capaz de ordenar las cartas para que este proceso salga bien.

Como pista: En lugar de hacerlo con las 40 cartas, se puede empezar con un solo palo, es decir, diez cartas.
Cuando ya seas capaz de hacerlo con diez cartas, inténtalo con 20 ...

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES DE ESTRATEGIA

ACTIVIDAD 1 :CUADRADO MÁGICO

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1.-

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2.-

4	3	8
9	5	1
2	7	6

3.-

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4.-

6	7	2
1	5	9
8	3	4

5.-

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6.-

8	3	4
1	5	9
6	7	2

7.-

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8.-

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Escribe aquí las 9 cifras que has empleado en el cuadrado anterior:

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***

¿Qué observas?
1.- ¿Quién ocupa la posición central? *El 5*
2.- ¿Cuánto suman los dos extremos? *10*
3.- ¿Cuánto suman el segundo y el penúltimo? *10*
4.- ¿Y el tercero y el antepenúltimo? *10*
5.- ¿Y el tercero y el séptimo? *10*
6.- ¿Y el cuarto y el sexto? *10*

Te proponemos ahora otro cuadrado mágico.
Esta vez vas a colocar los nueve primeros números pares empezando por el 0.
O sea, tienes que colocar el 0 , el 2 , el 4 , el 6 , el 8 , el 10 , el 12 , el 14 y el 16.
¿ Cuánto sumarán ahora?
Pues será: 0 + 16 + 8 = 24
¿Cómo podríamos resolverlo aprovechando la solución anterior?

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	*14*	*16*

Bien, simplemente cambiamos el 1 *por el 0, el* 2 *por el 2, el* 3 *por el 4, el* 4 *por el 6, el* 5 *por el 8, el* 6 *por el 10, el* 7 *por el 12, el* 8 *por el 14, el* 9 *por el 16*

8	1	6
3	5	7
4	9	2

14	*0*	*10*
4	*8*	*12*
6	*16*	*2*

¿Qué otros números podríamos proponer para colocar?
Por ejemplo los primeros impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17
O los primeros múltiplos de cinco: 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 y 40
¿Cuánto sumarían?
En el caso de los primeros impares: 1 + 17 + 9 = 27
En el caso de los primeros múltiplos de cinco: 0 + 40 + 20 = 60

Si ya conoces los números negativos, se podría proponer colocar del –4 al 4:
–4 , –3 , –2 , –1 , 0 , 1 , 2 , 3 , y 4
¿Cuánto sumarían las filas y columnas? *– 4 + 4 + 0 = 0*
Escribe aquí una solución:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
– 4	*– 3*	*– 2*	*– 1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*

8	1	6
3	5	7
4	9	2

3	*–4*	*1*
–2	*0*	*2*
–1	*4*	*–3*

ACTIVIDAD 2:CRIPTOGRAMA Nº 1

PROCESO LÓGICO PARA SU SOLUCIÓN

Vamos a intentar seguir un proceso ordenado y lógico para resolver el criptograma y, de paso, ver todas las soluciones posibles, en el caso de que haya más de una.

1º.-

$E + E = E$

O bien,

$E + E = E + 10$

¿Qué única cifra cumple la primera (la segunda es imposible) condición?

Supongo que ya has averiguado que

$\boxed{E = 0}$

2º.- ¿Qué valor puede tener V?

Lógicamente es "la que nos llevamos" después de sumar la columna anterior. ¿Cuánto "nos podemos llevar" como máximo en una suma de dos sumandos?
Los sumandos anteriores, éste no es el caso, como máximo pueden ser 9. Así 9 + 9 = *18*
Luego nos llevaríamos *1* y ya sabemos que

$\boxed{V = 1}$

3º.-

Evidentemente éste no era el caso porque en la columna anterior sólo había un sumando, la N; luego como hemos visto que como máximo en una suma de dos sumandos nos podemos llevar *1* y al añadírsela a N nos llevamos una a la columna siguiente ... El único valor posible de N es *9*. Así:

$\boxed{N = 9}$

4º.-

Ahora sustituye estas tres letras por sus valores:

			O	N	C	E
				9		0
+		N	U	E	V	E
		9		0	1	0
	V	E	I	N	T	E
	1	0		9		0

Veamos lo que tenemos ahora:

$\boxed{C} + \boxed{1} = \boxed{T}$
Porque no nos llevamos ninguna.

$\boxed{O} + \boxed{U} = \boxed{I} + 10$
Porque nos llevamos una

$\boxed{I} + \boxed{T} = 10$
Porque *1* + *0* + I + *9* + T + *0* = 20

Ahora tacha las cifras que ya hemos empleado:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Y vemos las que disponemos para las letras: C , T , O , U e I

5º.-
Ahora con las cifras libres hacemos las suposiciones:

<u>1ª suposición:</u>
La I vale *2* por lo tanto la T vale *8* y la C vale *7*
Cifras libres:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como O + U será *12* . Vemos que con las cifras libres no se puede conseguir.

<u>2ª suposición:</u>
La I vale *3* por lo tanto la T vale *7* y la C vale *6*
Cifras libres:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como O + U será *13* . La O puede valer *8* y la U *5*
Y obtenemos las primera solución: $\boxed{\mathbf{O = 8}}$ $\boxed{\mathbf{U = 5}}$

Pero también puede ser al revés: $\boxed{\mathbf{O = 5}}$ $\boxed{\mathbf{U = 8}}$

La suposición ha funcionado y nos ha proporcionado dos soluciones cuando:

$\boxed{\mathbf{I = 3}}$ $\boxed{\mathbf{T = 7}}$ $\boxed{\mathbf{C = 6}}$

Ya habríamos acabado pero continuamos por si encontramos alguna otra solución.

<u>3ª suposición.</u>

La I vale *4* por tanto la T vale *6* y la C vale *5*
Cifras libres:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como O + U será *14* Vemos que con las cifras libres no tenemos ninguna posibilidad.

4ª suposición.
I = *5* y entonces la T vale *5* ¡IMPOSIBLE!

5ª suposición.
I = *6* y por tanto la T vale *4* y la C vale *3*
Cifras libres:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como O + U sería *16* . Con las cifras libres esto no se puede conseguir.

6ª suposición.
I = *7* y por tanto T = *3* y C = *2*
Cifras libres:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como O + U sería *17* Con las cifras libres esto no se puede conseguir.

7ª suposición.
I = *8* y por tanto T = *2* y C = *1* ¡IMPOSIBLE!
¡Esta cifra ya está empleada!

FIN

Conclusión:
Hemos obtenido dos soluciones:

PRIMERA SOLUCIÓN

			O 8	N 9	C 6	E 0
+		N 9	U 5	E 0	V 1	E 0
	V 1	E 0	I 3	N 9	T 7	E 0

SEGUNDA

			O 5	N 9	C 6	E 0
+		N 9	U 8	E 0	V 1	E 0
	V 1	E 0	I 3	N 9	T 7	E 0

OTROS CRIPTOGRAMAS

La única solución del primero de este grupo es la siguiente:

		S	E	N	D
		9	5	6	7
+		M	O	R	E
		1	0	8	5
	M	O	N	E	Y
	1	0	6	5	2

El siguiente tiene muchas soluciones, 24 o ¿alguna otra más?, que se corresponden con las siguientes en cada una de las cuales se puede intercambiar el valor de las letras P y L

1ª

	S	P	E	N	D
	4	1	6	2	3
+		L	E	S	S
		8	6	4	4
	M	O	N	E	Y
	5	0	2	6	7

2ª

	S	P	E	N	D
	2	4	8	6	7
+		L	E	S	S
		5	8	2	2
	M	O	N	E	Y
	3	0	8	6	9

3ª

	S	P	E	N	D
	1	4	9	8	6
+		L	E	S	S
		5	9	1	1
	M	O	N	E	Y
	2	0	8	9	7

4ª

	S	P	E	N	D
	1	3	9	8	4
+		L	E	S	S
		6	9	1	1
	M	O	N	E	Y
	2	0	8	9	5

5ª

	S	P	E	N	D
	5	2	3	7	9
+		L	E	S	S
		8	3	5	5
	M	O	N	E	Y
	6	0	7	3	4

6ª

	S	P	E	N	D
	6	1	2	5	8
+		L	E	S	S
		9	2	6	6
	M	O	N	E	Y
	7	0	5	2	4

7ª

	S	P	E	N	D
	6	3	2	5	4
+		L	E	S	S
		8	2	6	6
	M	O	N	E	Y
	7	1	5	2	0

8ª

	S	P	E	N	D
	5	3	4	9	2
+		L	E	S	S
		8	4	5	5
	M	O	N	E	Y
	6	1	9	4	7

9ª

	S	P	E	N	D
	1	*5*	*8*	*6*	*9*
+		L	E	S	S
		7	*8*	*1*	*1*
	M	O	N	E	Y
	2	*3*	*6*	*8*	*0*

10ª

	S	P	E	N	D
	8	*6*	*0*	*1*	*4*
+		L	E	S	S
		7	*0*	*8*	*8*
	M	O	N	E	Y
	9	*3*	*1*	*0*	*2*

11ª

	S	P	E	N	D
	2	*6*	*7*	*4*	*9*
+		L	E	S	S
		8	*7*	*2*	*2*
	M	O	N	E	Y
	3	*5*	*4*	*7*	*1*

12ª

	S	P	E	N	D
	8	*7*	*0*	*1*	*6*
+		L	E	S	S
		5	*0*	*8*	*8*
	M	O	N	E	Y
	9	*2*	*1*	*0*	*4*

ACTIVIDAD 3 : UN PROBLEMA DE VASOS Y AGUA

	Vasija de 9 l.	Vasija de 4 l.	Consigo medir..
Al principio las dos vasijas están vacías	0	0	
Lleno la vasija grande	9	0	**9**
Con la grande lleno la pequeña	5	4	**5 4**
Tiro el contenido de la pequeña	5	0	
Con la grande lleno la pequeña	1	4	**1**
Vacío la vasija pequeña	1	0	
Paso el agua de la vasija grande a la pequeña	0	1	
Lleno la vasija grande	9	1	**10**
Con la vasija grande lleno la pequeña	6	4	**6**
Vacío la vasija pequeña	6	0	
Lleno la vasija pequeña con la grande	2	4	**2**
Vacío la vasija pequeña	2	0	
Paso el agua de la grande a la pequeña	0	2	
Lleno la vasija grande	9	2	
Con la grande acabo de llenar la pequeña	7	4	**7 11**
Vacío la vasija pequeña	7	0	
Con la vasija grande lleno la pequeña	3	4	**3**
Tiro el agua de la vasija pequeña	3	0	
Paso el agua de la grande a la pequeña	0	3	
Lleno la vasija grande	9	3	**12**
Con la vasija grande acabo de llenar la pequeña	8	4	**8**
Acabo de llenar la grande	9	4	**13**

EL OTRO PROBLEMA DE VASOS Y AGUA

	Vasija de 10 l.	Vasija de 7 l.	Consigo medir..
Al principio las dos vasijas están vacías	0	0	
Lleno la vasija grande	10	0	**10**
Con la grande lleno la pequeña	3	7	**3 7**
Tiro el contenido de la pequeña	3	0	
Paso el agua de la grande a la vasija pequeña	0	3	
Lleno la vasija grande	10	3	**13**
Con la grande lleno la pequeña	6	7	**6**
Tiro el agua de la vasija pequeña	6	0	
Paso el agua de la vasija grande a la pequeña	0	6	
Lleno la vasija grande	10	6	**16**
Con la vasija grande lleno la pequeña	9	7	**9**
Tiro el agua de la vasija pequeña	9	0	
Con la vasija grande lleno la pequeña	2	7	**2**
Tiro el agua de la vasija pequeña	2	0	
Paso el agua de la vasija grande a la pequeña	0	2	
Lleno la vasija grande	10	2	**12**
Con la vasija grande lleno la pequeña	5	7	**5**
Tiro el agua de la vasija pequeña	5	0	
Paso el agua de la grande a la vasija pequeña	0	5	
Lleno la vasija grande	10	5	**15**
Con la vasija grande lleno la pequeña	8	7	**8**
Tiro el agua de la vasija pequeña	8	0	
Lleno con la grande la vasija pequeña	1	7	**1**
Tiro el agua de la vasija pequeña	1	0	
Paso el agua de la vasija grande a la vasija pequeña	0	1	
Lleno la vasija grande	10	1	**11**
Con la vasija grande lleno la pequeña	4	7	**4**
Tiro el agua de la vasija pequeña	4	0	
Paso el agua de la vasija grande a la pequeña	0	4	
Lleno la vasija grande	10	4	**14**
Lleno la vasija pequeña	10	7	**17**

ACTIVIDAD 4 : UN PROBLEMA DE CUATROS

Estas pueden ser alguna de las soluciones:

Para obtener el 0:

$$\boxed{44 - 44 = 0}$$

$$\boxed{\frac{4}{4} - \frac{4}{4} = 0}$$

Para obtener el 1:

$$\boxed{\frac{44}{44} = 1}$$

$$\boxed{\frac{4}{4} \cdot \frac{4}{4} = 1}$$

Para obtener el 2:

$$\boxed{\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2}$$

Para obtener el 3:

$$\boxed{\frac{4+4+4}{4} = 3}$$

Para obtener el 4:

$$\boxed{\frac{4-4}{4} + 4 = 4}$$

$$\boxed{(4-4) \cdot 4 + 4}$$

Para obtener el 5:

$$\boxed{\frac{4 \cdot 4 + 4}{4} = 5}$$

Para obtener el 6:

$$\boxed{4+\frac{4+4}{4}=6}$$

Para obtener el 7:

$$\boxed{\frac{44}{4}-4=7}$$

$$\boxed{4+4-\frac{4}{4}=7}$$

Para obtener el 8:

$$\boxed{(4+4)\cdot\frac{4}{4}=8}$$

$$\boxed{(4+4+4)-4}$$

Para obtener el 9:

$$\boxed{4+4+\frac{4}{4}=9}$$

Ya habríamos acabado pues el problema plantea "obtener las cifras significativas", es decir, del 0 al 9, pero se podría continuar:

Para obtener el 10:

$$\boxed{\frac{44-4}{4}=10}$$

¿ Se podría obtener el 11?, ¿ y el 12 ? ¿qué otros números se pueden obtener?

LOS CUATRO TRESES

Una forma de rentabilizar las estructuras anteriores es cambiar los cuatro por treses y ver qué cifras se obtienen:

$$\boxed{33-33=0}$$

$$\boxed{\frac{3}{3}-\frac{3}{3}=0}$$

$$\boxed{\frac{33}{33}=1}$$

$$\boxed{\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{3}=1}$$

$$\boxed{\frac{3}{3}+\frac{3}{3}=2}$$

$$\boxed{\frac{3+3+3}{3}=3}$$

Hasta aquí ha sido indiferente la utilización del 4 o del 3: El resultado ha sido la misma cifra.

$$\boxed{\frac{3-3}{3}+3=3}$$

$$\boxed{(3-3)\cdot 3+3=3}$$

$$\boxed{\frac{3\cdot 3+3}{3}=4}$$

$$\boxed{3+\frac{3+3}{3}=5}$$

$$\boxed{\frac{33}{3} - 3 = 8}$$

$$\boxed{3 + 3 - \frac{3}{3} = 5}$$

$$\boxed{(3 + 3) \cdot \frac{3}{3} = 6}$$

$$\boxed{(3 + 3 + 3) - 3 = 6}$$

$$\boxed{3 + 3 + \frac{3}{3} = 7}$$

$$\boxed{\frac{33 - 3}{3} = 10}$$

Nos ha quedado el 9 sin conseguir. Recordar que lo que hemos hecho ha sido sustituir en las expresiones del primer problema, el 4 por el 3, dejando las mismas operaciones. No hemos tenido que "rompernos mucho la cabeza".
Conseguir la cifra que nos falta no es muy difícil:

$$\boxed{3 \cdot 3 + (3 - 3) = 9}$$

$$\boxed{3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{3} = 9}$$

LOS CUATRO CINCOS

No se consiguen todas las cifras, ¿o quizá sí?

$$\boxed{55 - 55 = 0}$$

$$\boxed{\frac{5}{5} + \frac{5}{5} = 2}$$

$$\boxed{\frac{5+5+5}{5} = 3}$$

$$\boxed{\frac{5-5}{5} + 5 = 5}$$

$$\boxed{\frac{5 \cdot 5 + 5}{5} = 6}$$

$$\boxed{5 + \frac{5+5}{5} = 7}$$

$$\boxed{5 + 5 - \frac{5}{5} = 9}$$

$$\boxed{\frac{55-5}{5} = 10}$$

ACTIVIDAD 5 : UN PROBLEMA DE ORDEN

La presente actividad es, sin duda, la más difícil de las propuestas en este proyecto. Sin embargo, es una de las más ricas en cuanto a capacidad para generar procesos individualizados de respuesta.
Recomendamos encarecidamente que el profesor se enfrente a la resolución de la actividad antes de seguir leyendo estas páginas. Sólo después de intentar resolverlo por nuestra cuenta nos daremos cuenta de la dificultad del problema.

Para empezar, el profesor deberá hacer delante de todos los alumnos el juego con todo el mazo . Esta es la ordenación de las 40 cartas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**4**	**6**	**5**	**3**	**6**	**2**	**7**	**4**	**S**	**R**	**C**	**5**	**R**	**3**

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	**6**	**2**	**7**	**3**	**7**	**4**	**4**	**5**	**S**	**6**	**C**	**7**	**C**	**S**	**5**	**C**	**R**	**R**	**S**

Se han indicado con diferentes colores los diferentes palos de la baraja.
Fucsia para oros
Rojo para copas
Azul para espadas
Verde para bastos
Las letras **S C** y **R** indican la sota, el caballo y el rey.

PROCESO DE RESOLUCIÓN

Es fácil ver que al principio una carta debe ser separada por otra de su contigua.
Así los dos primeros palos van alternativamente colocados

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7**		**S**		**C**		**R**	

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7**		**S**		**C**		**R**	

El siguiente palo hay que colocarlo dejando también una carta en medio de cada dos consecutivas. La clave es saber que esa carta que hay que dejar en medio debe ser un hueco puesto que las posiciones de los oros y de las copas ya no están en el mazo (han ido saliendo antes).

Así la última carta de copas (el rey) ha sido colocado en la posición 39

Hueco:	Posición 40	
Primer espacio vacío:	Posición 2	El as de espadas: **1**
Hueco:	Posición 4	
Primer espacio vacío:	Posición 6	El dos de espadas: **2**
Hueco:	Posición 8	
Primer espacio vacío:	Posición 10	El tres de espadas: **3**

...

Se ve fácilmente que el tercer palo se coloca cada 4 posiciones.

El mazo queda así

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	**2**		**3**	**2**	**4**		**5**	**3**	**6**		**7**	**4**	**S**		**C**	**5**	**R**	

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	**6**	**2**		**3**	**7**	**4**		**5**	**S**	**6**		**7**	**C**	**S**		**C**	**R**	**R**	

El último palo es el que más vueltas da.

La última carta de espadas, el rey, ha sido colocada en la posición **38**

Hueco:	Posición 40	
Primer espacio vacío	Posición 4	El as de bastos: **1**
Hueco:	Posición 8	
Primer espacio vacío	Posición 12	El dos de bastos: **2**
Hueco:	Posición 16	
Primer espacio vacío	Posición 20	El tres de bastos: **3**
Hueco:	Posición 24	
Primer espacio vacío	Posición 28	El cuatro de bastos: **4**
Hueco:	Posición 32	
Primer espacio vacío:	Posición 36	El cinco de bastos: **5**
Hueco:	Posición 40	

Como se acaba el mazo y hay que volver a empezar rellenando los huecos, escribimos el resultado hasta el momento:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**4**		**5**	**3**	**6**	**2**	**7**	**4**	**S**		**C**	**5**	**R**	**3**

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	**6**	**2**		**3**	**7**	**4**	**4**	**5**	**S**	**6**		**7**	**C**	**S**	**5**	**C**	**R**	**R**	

Primer espacio vacío:	Posición 8	El seis de bastos: **6**
Hueco	Posición 16	
Primer espacio vacío:	Posición 24	El siete de bastos: **7**
Hueco:	Posición 32	
Primer espacio vacío:	Posición 40	La sota de bastos: **S**

Se ha vuelto a acabar el mazo.

Escribimos el resultado hasta el momento:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**4**	**6**	**5**	**3**	**6**	**2**	**7**	**4**	**S**		**C**	**5**	**R**	**3**

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	**6**	**2**	**7**	**3**	**7**	**4**	**4**	**5**	**S**	**6**		**7**	**C**	**S**	**5**	**C**	**R**	**R**	**S**

Seguimos:
Hueco: Posición 16
Primer espacio vacío: Posición 32 El caballo de bastos: **C**

Volvemos a dar la vuelta:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**4**	**6**	**5**	**3**	**6**	**2**	**7**	**4**	**S**		**C**	**5**	**R**	**3**

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	**6**	**2**	**7**	**3**	**7**	**4**	**4**	**5**	**S**	**6**	**C**	**7**	**C**	**S**	**5**	**C**	**R**	**R**	**S**

Hueco: Como ya solo queda una carta es el rey de bastos: **R**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**4**	**6**	**5**	**3**	**6**	**2**	**7**	**4**	**S**	**R**	**C**	**5**	**R**	**3**

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	**6**	**2**	**7**	**3**	**7**	**4**	**4**	**5**	**S**	**6**	**C**	**7**	**C**	**S**	**5**	**C**	**R**	**R**	**S**

Si este proceso resulta complicado con las 40 cartas, se puede comenzar por un único palo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		**2**		**3**		**4**		**5**	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**6**	**2**		**3**	**7**	**4**		**5**	**S**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**6**	**2**		**3**	**7**	**4**	**C**	**5**	**S**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**6**	**2**	**R**	**3**	**7**	**4**	**C**	**5**	**S**

Y continuar, después con 20 cartas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7**		**S**		**C**		**R**	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	**2**		**3**	**2**	**4**		**5**	**3**	**6**		**7**	**4**	**S**		**C**	**5**	**R**	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	**2**	**6**	**3**	**2**	**4**		**5**	**3**	**6**	**7**	**7**	**4**	**S**		**C**	**5**	**R**	**S**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	**2**	**6**	**3**	**2**	**4**		**5**	**3**	**6**	**7**	**7**	**4**	**S**	**C**	**C**	**5**	**R**	**S**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	**2**	**6**	**3**	**2**	**4**	**R**	**5**	**3**	**6**	**7**	**7**	**4**	**S**	**C**	**C**	**5**	**R**	**S**

O con tres palos:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7**		**S**

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	C		**R**		**1**		**2**		**3**		**4**		**5**	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	**6**	**2**		**3**	**7**	**4**		**5**	**S**	**6**		**7**	**C**	**S**

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	C	**R**	**R**		**1**	**1**	**2**		**3**	**2**	**4**		**5**	**3**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	**6**	**2**		**3**	**7**	**4**	**4**	**5**	**S**	**6**		**7**	**C**	**S**

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
5	**C**	**R**	**R**		**1**	**1**	**2**	**6**	**3**	**2**	**4**		**5**	**3**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	**6**	**2**	**7**	**3**	**7**	**4**	**4**	**5**	**S**	**6**		**7**	**C**	**S**

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
5	**C**	**R**	**R**	**S**	**1**	**1**	**2**	**6**	**3**	**2**	**4**		**5**	**3**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	**6**	**2**	**7**	**3**	**7**	**4**	**4**	**5**	**S**	**6**	**C**	**7**	**C**	**S**

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
5	**C**	**R**	**R**	**S**	**1**	**1**	**2**	**6**	**3**	**2**	**4**	**R**	**5**	**3**

Agradecimientos

A Mª Rosario Rodríguez Cabrera

(Asesora de Matemáticas que fue del Centro de Profesores de Alcobendas)

A Mario Sánchez Rodríguez

(Compañero de Grupos de Trabajo y del Proyecto de Innovación del curso 90/91)

A mis alumnos

(Con los que continúo aprendiendo cada día)

Este material didáctico ha sido premiado con la 5º mención en el
XI Certamen de Materiales Curriculares
convocado por la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid. Año 2003.
Publicado en el B.O.C.M. n.º 298 de 15 de diciembre de 2003 (páginas 28 a 32).

https://www.bocm.es/boletin/CM_Boletin_BOCM/2003/12/15/29800.PDF